POROMÉCANIQUE

P. Dangla

Université Paris-Est, Navier, UMR CNRS 113

LMSGC 2 allée Kepler 77420 Champs sur Marne

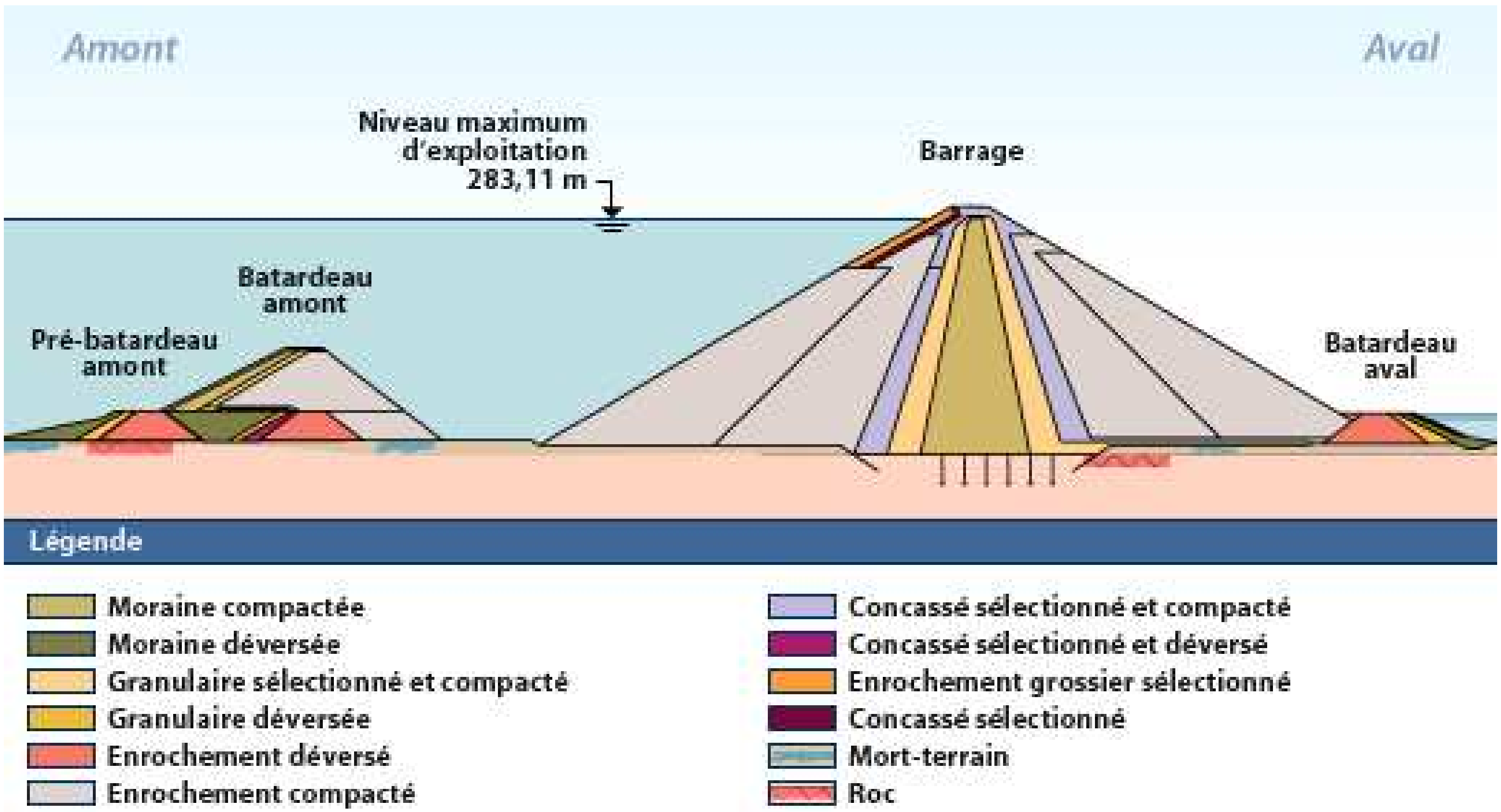
Matériaux

Génie civil
Sols
Roches
Bétons
Plâtre
Pierres

Biomécanique
Os
Muscles

Applications

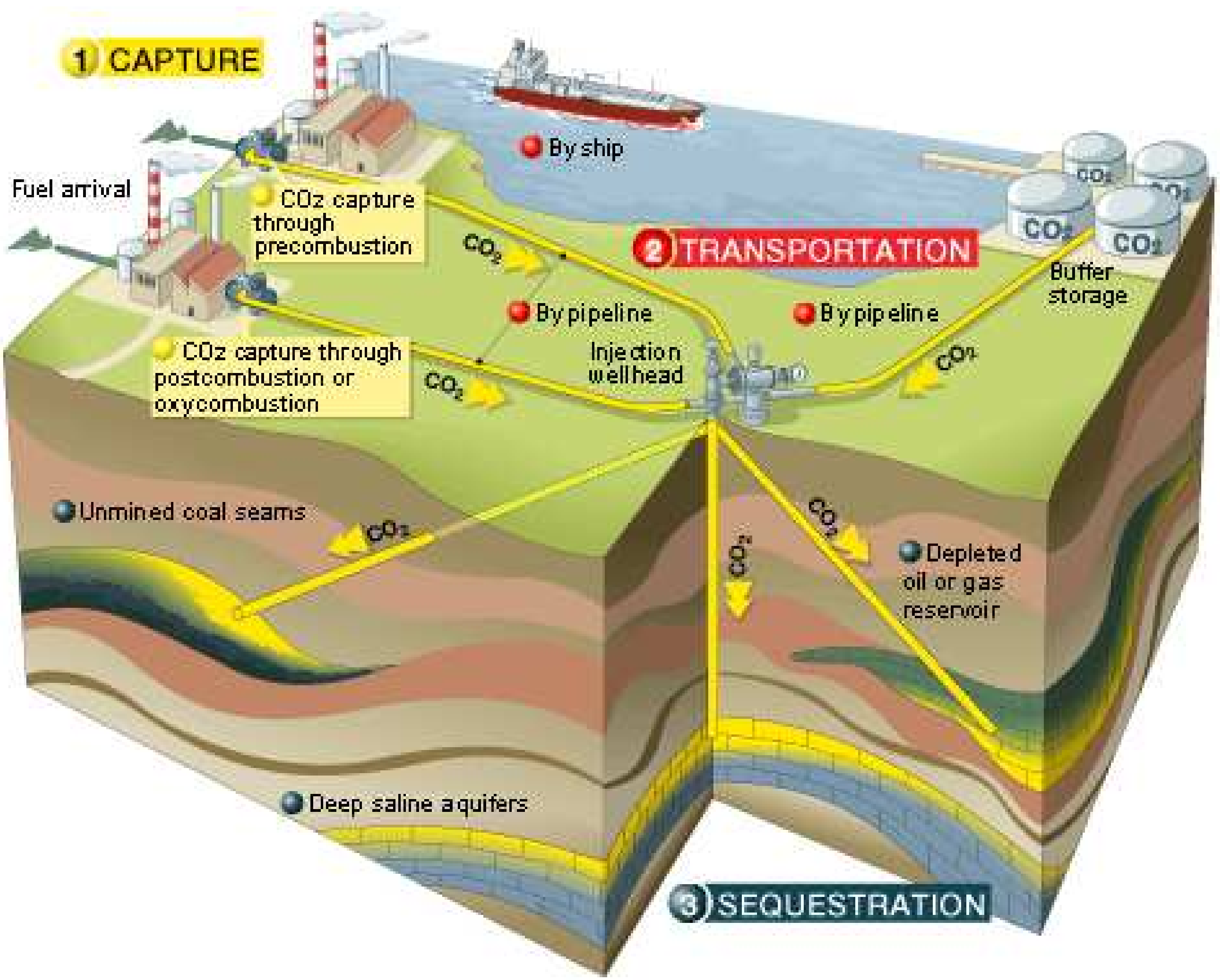
Barrage en terre



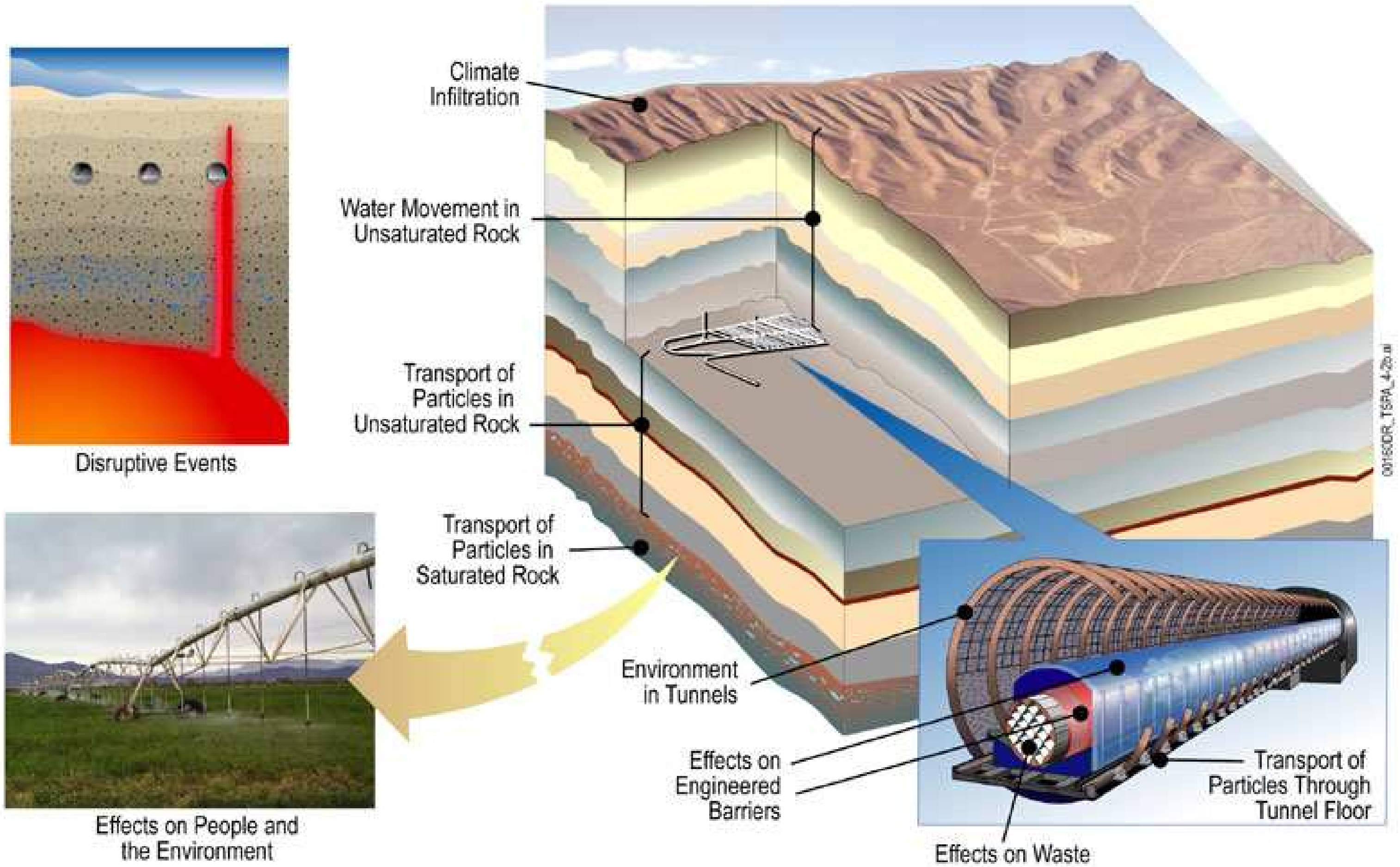
Barrage

Digues

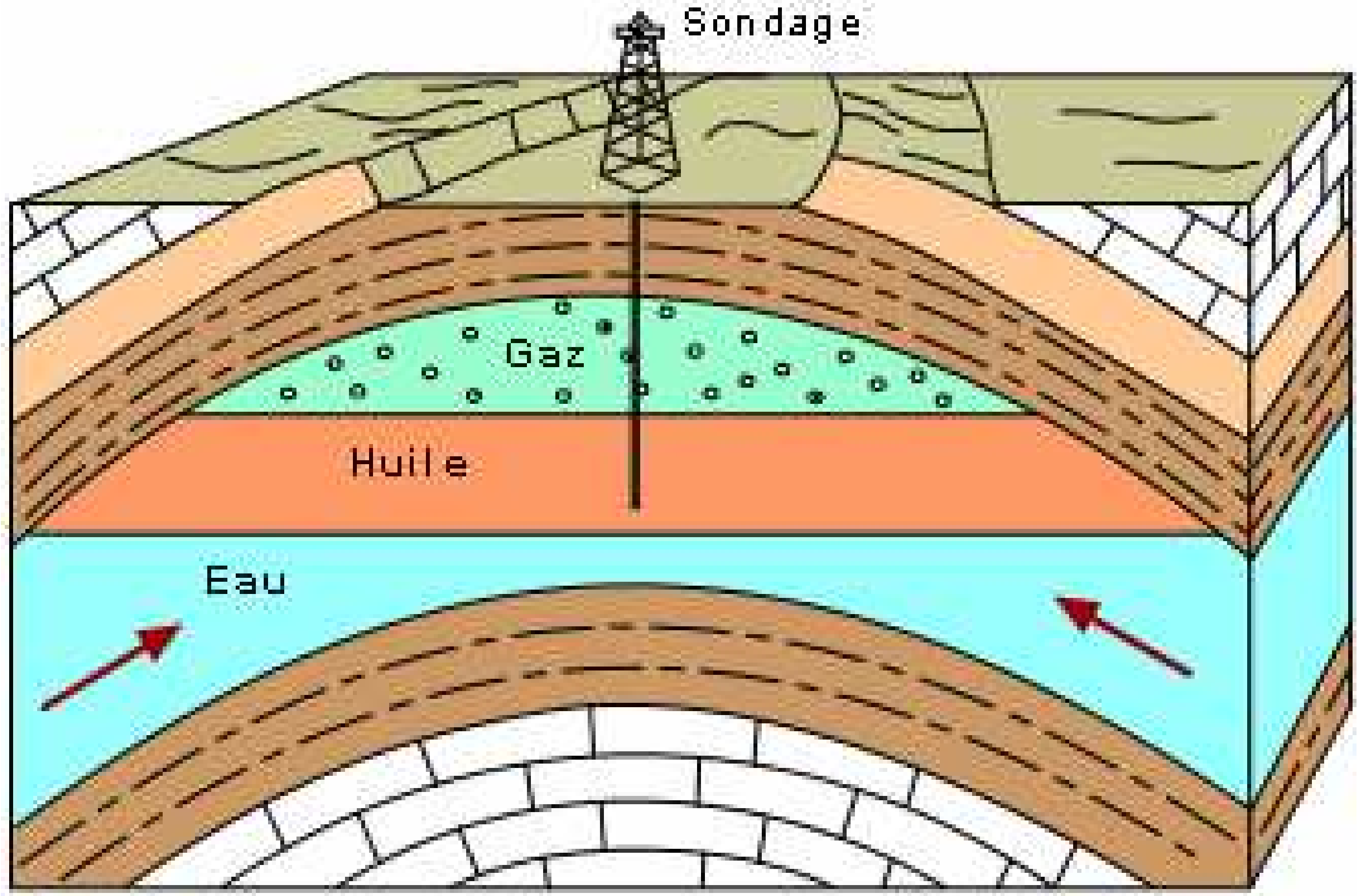
Séquestration du CO_2



Stockage des déchets radioactifs



Réservoir de gaz, huile



Piège structural: anticlinal

Liquéfaction des sols

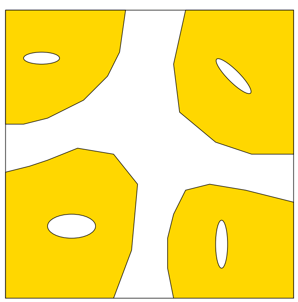
Plan du cours

- Description du mouvement et des déformations
- Conservation de la masse fluide
- Loi de Darcy
- Contraintes
- Thermodynamique
- Poroélasticité
- Problèmes d'évolution
- Exemples

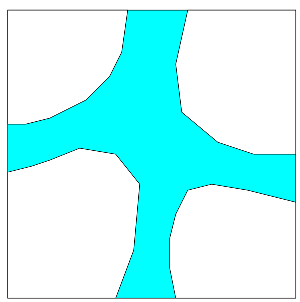
Représentation du milieu poreux

Échelle microscopique

superposition de
deux particules
au point $\underline{x}$



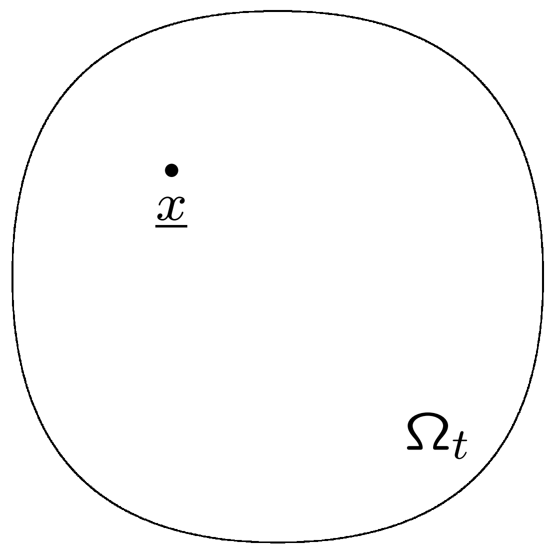
squelette



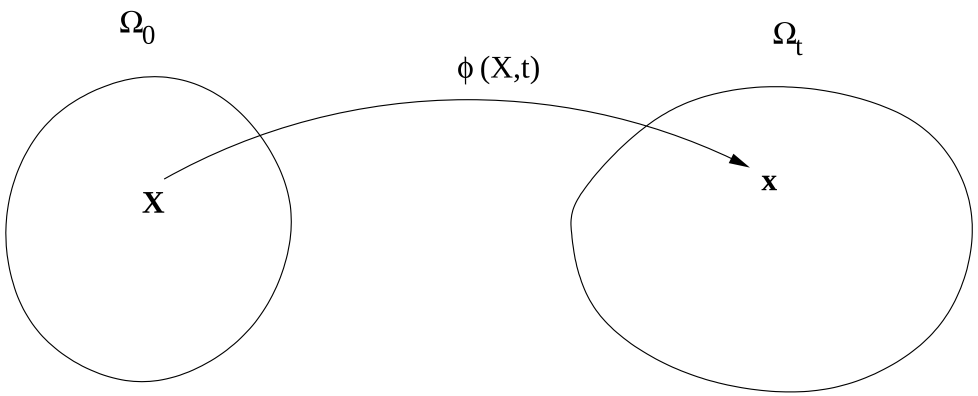
fluide

Échelle macroscopique

superposition de
deux milieux continus



Description lagrangienne par rapport au squelette



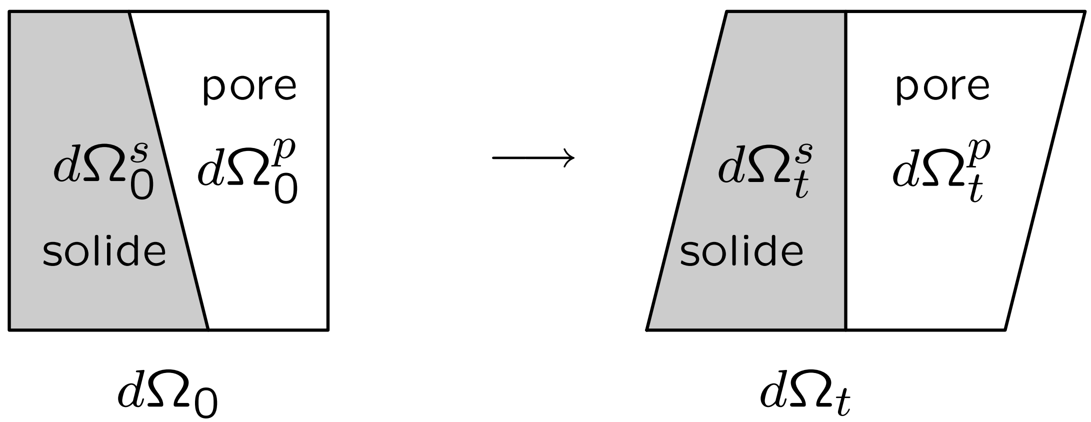
- Le mouvement :

  squelette : $(\underline{X}, t) \longrightarrow \underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X}, t)$ $\qquad \underline{\xi} = \underline{x} - \underline{X}$

  fluide : $(\underline{X}, t) \longrightarrow \underline{U}_f = \underline{U}_f(\underline{X}, t)$ $\qquad (\frac{\partial \underline{U}_f}{\partial t} \neq \underline{\gamma}_f$!)

- Déformations du squelette (H.P.P.) : $\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla \xi}} + {}^t\underline{\underline{\nabla \xi}})$

Porosités lagrangienne et eulerienne



$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla \Phi}}$

$$d\Omega_t = d\Omega_t^p + d\Omega_t^s$$

- (*lagrangienne*) $\phi = \dfrac{d\Omega_t^p}{d\Omega_0}$

- (eulerienne) $n = \dfrac{d\Omega_t^p}{d\Omega_t}$ $\qquad \phi = \det \underline{\underline{F}}\, n \qquad$ (pour mémoire)

Lien avec la déformation du constituant solide

On pose $\epsilon_s = \dfrac{d\Omega_t^s - d\Omega_0^s}{d\Omega_0^s}$ la variation de volume du constituant solide.

D'autre part $d\Omega_t = d\Omega_t^s + d\Omega_t^p$ avec $d\Omega_t^p = \phi d\Omega_0$. On trouve

$$\boxed{\mathrm{tr}\underline{\underline{\epsilon}} = (1 - \phi_0)\epsilon_s + \delta\phi}$$

Si le constituant solide est incompressible ou si ϵ_s est négligeable devant $\delta\phi$, alors

$$\mathrm{tr}\underline{\underline{\epsilon}} = \delta\phi$$

Conservation de la masse fluide

Soit $m_f(\underline{X},t)d\Omega_0$ la masse fluide contenue à l'instant t dans $d\Omega_t$.

$$\boxed{m_f = \phi\rho} \qquad \rho = \text{masse volumique (vraie) du fluide}$$

La conservation de la masse fluide s'écrit donc: $\frac{d^f}{dt}(m_f(\underline{X},t)d\Omega_0) = 0$, soit

$$\boxed{\frac{\partial m_f}{\partial t} + \mathrm{div}(\underbrace{m_f \underline{u}_r}_{\underline{w}}) = 0}$$

où $\underline{u}_r = \underline{u}_f - \underline{u}_s$ est la vitesse relative du fluide par rapport au squelette.

$\underline{w} \cdot \underline{n} da$ est le débit de masse fluide à travers la surface matérielle de squelette da orientée suivant la normale $\underline{n}$.

Loi de Darcy (1856)

On peut montrer que la dissipation due au transport du fluide (inégalité de Clausius-Duhem) prend la forme :

$$\underline{J} \cdot \underline{X} = \frac{\underline{w}}{\rho} \cdot (-\underline{\nabla p} + \rho \underline{f}) \geq 0$$

D'après la théorie linéaire des processus irréversibles on peut relier linéairement le flux et la force sous la forme :

$$\boxed{\frac{\underline{w}}{\rho} = k(-\underline{\nabla p} + \rho \underline{f})}$$

k est appellée la perméabilité. Son unité est $L^2 T^{-1} Pa^{-1}$. On définit aussi souvent la perméabilité hydraulique $k_h = \rho g k$ dont l'unité est LT^{-1}.

Plus généralement dans un milieu anisotrope on a : $\dfrac{\underline{w}}{\rho} = \underline{\underline{k}} \cdot (-\underline{\nabla p} + \rho \underline{f})$.

$\underline{\underline{k}}$ est un tenseur du second ordre symétrique défini positif (où une matrice de composante k_{ij}).

Interprétation de $\frac{w}{\rho} \cdot (-\underline{\nabla p} + \rho \underline{f}) \geq 0$

Dans un fluide parfait incompressible en régime permanent, la charge hydraulique

$$h = p + \rho g z + \underbrace{(\tfrac{1}{2}\rho V^2)}_{\approx 0}$$

est constante le long des lignes de courant. Dans un fluide visqueux il y a perte de charge ce qui signifie que

$$\frac{d^f}{dt} h = \underline{\nabla h} \cdot \underline{u}_r < 0 \quad \text{i.e.} \quad (\frac{1}{\rho g}\underline{\nabla p} + \underline{e_z}) \cdot \underline{u} < 0$$

Les expériences effectuées par Darcy à partir de 1854 (dans la cour de l'hôpital de Dijon) ont montré que le vecteur $\phi \underline{u}$ est proportionnel au gradient de la charge hydraulique:

$$\phi \underline{u} = -k_h \underline{\nabla h} = \frac{k_h}{\rho g}(-\underline{\nabla p} - \rho g \underline{e_z})$$

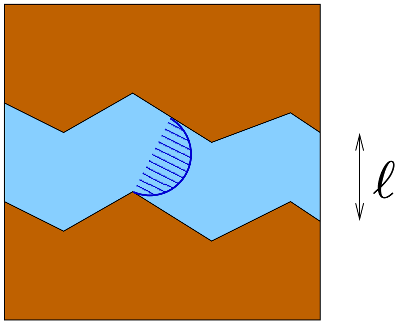
k_h est la perméabilité hydraulique du milieu poreux ($k_h > 0$ en m/s).

Perméabilité intrinsèque

Afin de rendre compte de la viscosité du fluide, appliquons une analyse dimensionnelle. Écrivons

$$J = f(X, \mu, \ell, \underbrace{\phi, \cdots}_{\text{géométrie}})$$

	J	X	μ	ℓ	ϕ	$\cdots$
L	1	-2	-1	1	0	0
M	0	1	1	0	0	0
T	-1	-2	-1	0	0	0



À partir de J, X, μ et ℓ on ne peut former qu'un nombre sans dimension : $\frac{J\mu}{X\ell^2}$. La relation précédente prend alors nécessairement la forme :

$$\frac{J\mu}{X\ell^2} = \chi(\phi, \cdots)$$

ce qui montre que

$$k = \frac{\ell^2\chi(\phi, \cdots)}{\mu} = \frac{k_{\text{int}}}{\mu}$$

Tenseur des contraintes

- totales : Le vecteur contrainte $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T}$ s'applique sur le solide ET le fluide.

$$\boxed{\text{div}\underline{\underline{\sigma}} + (m_s + m_f)\underline{g} = m_s\underline{\gamma}_s + m_f\underline{\gamma}_f}$$

- partielles : $\underline{T}$ est la somme de deux forces, $\underline{T}_s$ et $\underline{T}_f$, qui s'exercent respectivement sur le squelette et sur le fluide.

$$\underline{T}_s = \underline{\underline{\sigma}}_s \cdot \underline{n} \qquad \underline{T}_f = \underline{\underline{\sigma}}_f \cdot \underline{n} \qquad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_s + \underline{\underline{\sigma}}_f$$

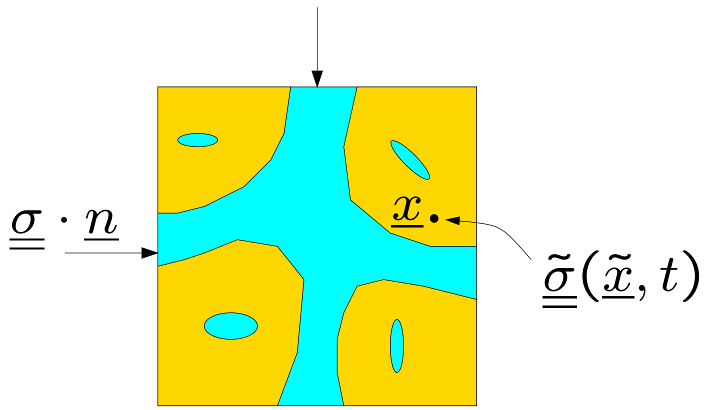
et

$$\begin{aligned}
\text{div}\underline{\underline{\sigma}}_s + m_s\underline{g} + \underline{a}_{f\rightarrow s} &= m_s\underline{\gamma}_s \\
\text{div}\underline{\underline{\sigma}}_f + m_f\underline{g} + \underline{a}_{s\rightarrow f} &= m_f\underline{\gamma}_f \\
\underline{a}_{f\rightarrow s} + \underline{a}_{s\rightarrow f} &= 0
\end{aligned}$$

$\underline{a}_{f\rightarrow s}$ = force d'interaction solide-fluide.

Interprétation de $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_s + \underline{\underline{\sigma}}_f$

Résultat de l'homogénéisation



$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{d\Omega} \int_{d\Omega} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} d\tilde{\Omega}$$

ceci suggère alors

$$\underline{\underline{\sigma}}_s = \frac{1}{d\Omega} \int_{d\Omega_s} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} d\tilde{\Omega} \qquad \underline{\underline{\sigma}}_f = \frac{1}{d\Omega} \int_{d\Omega_f} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} d\tilde{\Omega}$$

Forme de $\underline{\underline{\sigma}}_f$

Pour les fluides Newtoniens (incompressibles), on a:

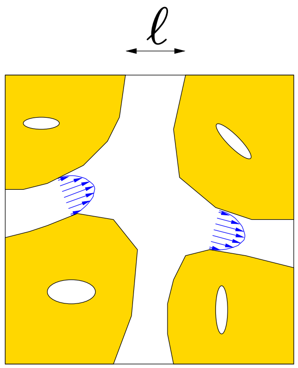
$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = -\tilde{p}\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\tilde{\tau}}} \qquad \text{avec} \qquad \underline{\underline{\tilde{\tau}}} = 2\mu\underline{\underline{\tilde{d}}}$$

on a donc une idée assez précise de $\underline{\underline{\sigma}}_f$:

$$\underline{\underline{\sigma}}_f = -\phi p\underline{\underline{1}} + \phi\underline{\underline{\tau}} \qquad \text{avec} \qquad p =<\tilde{p}>_{d\Omega_f} \quad \underline{\underline{\tau}} =<\underline{\underline{\tilde{\tau}}}>_{d\Omega_f}$$

On peut montrer que

$$\|\underline{\underline{\tau}}\| \equiv \frac{\ell}{L} < \|\underline{\underline{\tilde{\tau}}}\| >_{d\Omega_f}$$



$$\underline{\underline{\tilde{\nabla}\tilde{u}}} = O(\frac{U}{\ell})$$

L = longueur caractéristique de la structure
ℓ = longueur caractéristique des pores

$$\left(\text{car} \quad <\underline{\underline{\tilde{\nabla}\tilde{u}}}>_{d\Omega_f} = \underline{\underline{\nabla(<\tilde{u}>_{d\Omega_f})}} = O(\frac{U}{L})\right)$$

On peut donc supposer que $\underline{\underline{\tau}} = 0$, i.e.

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}}_f = -\phi p\underline{\underline{1}}}$$

Interprétation de la loi de Darcy

L'équation de la dynamique pour le milieu fluide s'écrit compte tenu de $\underline{\underline{\sigma}}_f = -\phi p \underline{\underline{1}}$:

$$-\underline{\nabla(\phi p)} + m_f(\underline{g} - \underline{\gamma}_f) + \underline{a}_{s \to f} = 0$$

ce qui montre que la force d'interaction $\underline{a}_{s \to f}$ est la somme de deux termes

$$\underline{a}_{s \to f} = p\underline{\nabla \phi} - \phi\underbrace{(-\underline{\nabla p} + \rho(\underline{g} - \underline{\gamma}_f))}_{\underline{\underline{k}}^{-1}.\frac{\underline{w}}{\rho} = \mu \underline{\underline{k}}_{\text{int}}^{-1}.\frac{\underline{w}}{\rho}}$$

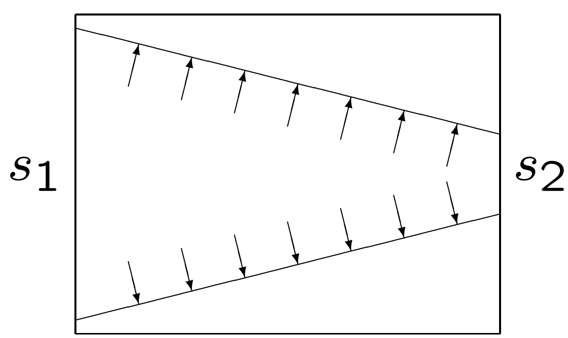
qui peuvent s'identifier terme à terme à la composante de pression et à la composante visqueuse

$$\underline{a}_{s \to f} = \int_S -\tilde{p}\underline{\tilde{n}}d\tilde{a} + 2\mu \int_S \underline{\underline{\tilde{d}}} \cdot \underline{\tilde{n}}d\tilde{a}$$

La loi de Darcy est donc en quelque sorte une modélisation de la force d'interaction visqueuse.

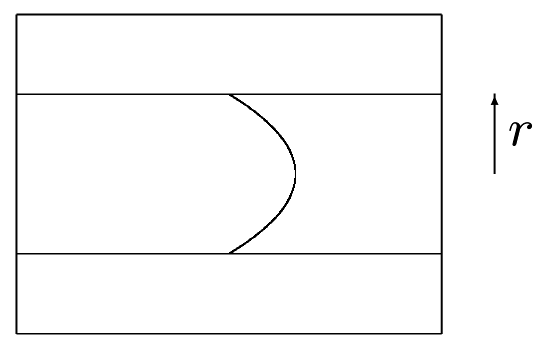
Illustration sur l'exemple d'une conduite

$$\underline{a}_{f\to s} = -p\underline{\nabla\phi} + \phi\mu\underline{\underline{k}}_{\text{int}}^{-1}\cdot\frac{\underline{w}}{\rho}$$



$$a_{f\to s} = p(s_1 - s_2)$$

Poiseuille



$$a_{f\to s} = \frac{8\mu}{r^2}\frac{\underline{w}}{\rho}$$

La perméabilité intrinsèque, $\underline{\underline{k}}_{\text{int}}$ (m^2), caractérise la dimension des pores au carré.

Thermodynamique
systèmes homogènes fermés

- Premier et deuxième principes : $\boxed{dE = \delta W + \delta Q}$ $\boxed{dS \geq \frac{\delta Q}{T}}$

  L'énergie interne E et l'entropie S sont des *fonctions d'état* du système dans le sens qu'elles ne dépendent pas de la manière dont le système a été préparé. Elles dépendent de propriétés qui déterminent l'état actuel du système : les *variables d'état*. E et S sont des propriétés extensives.

- Inégalité fondamentale de Clausius-Duhem ($\Psi = E - TS$) :

$$\boxed{d\Psi \leq \delta W - SdT}$$

Application aux fluides

Pour une masse M (arbitraire, $M = 1$) de fluide visqueux, les deux premiers principes impliquent l'égalité suivante :

$$d(M\psi) = -pd\left(\frac{M}{\rho}\right) - MsdT \qquad (\delta W \geq -pd\left(\frac{M}{\rho}\right))$$

où ψ est l'énergie libre spécifique (i.e. par unité de masse). C'est une fonction de $\frac{1}{\rho}$ (et T).

De même l'enthalpie libre spécifique $\boxed{g = \psi + \frac{p}{\rho}}$ (ou énergie de Gibbs) est une fonction de p:

$$dg = \frac{dp}{\rho} - sdT$$

Pour un gaz parfait $g = g_0 + \frac{RT}{M} \ln \frac{p}{p_0}$ (M = masse molaire).

Équation d'état du fluide (T = cste)

L'équation d'état du fluide s'écrit :

$$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_T$$

Pour un liquide faiblement compressible on obtient en linéarisant

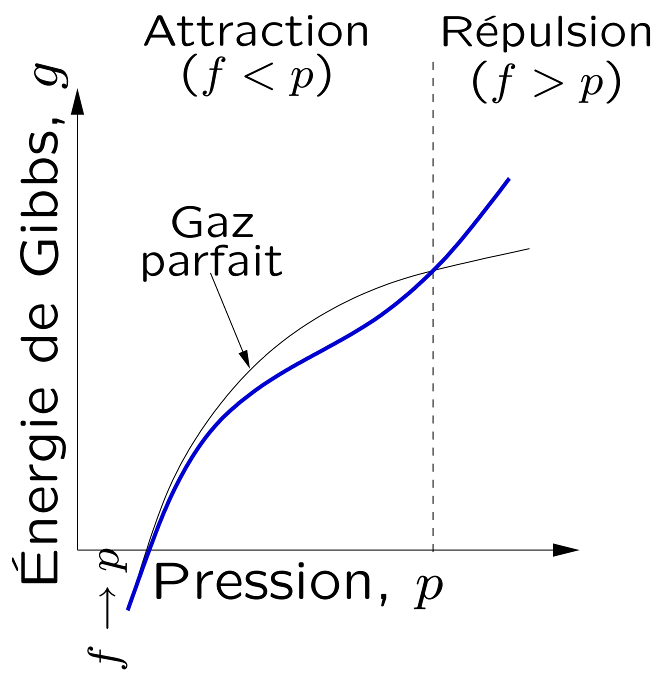
$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \;=\; \frac{p - p_0}{K_f}$$

K_f = module de compression du fluide.

Gazs

- Pour un gaz parfait : $g = g_0 + \frac{RT}{M} \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)$

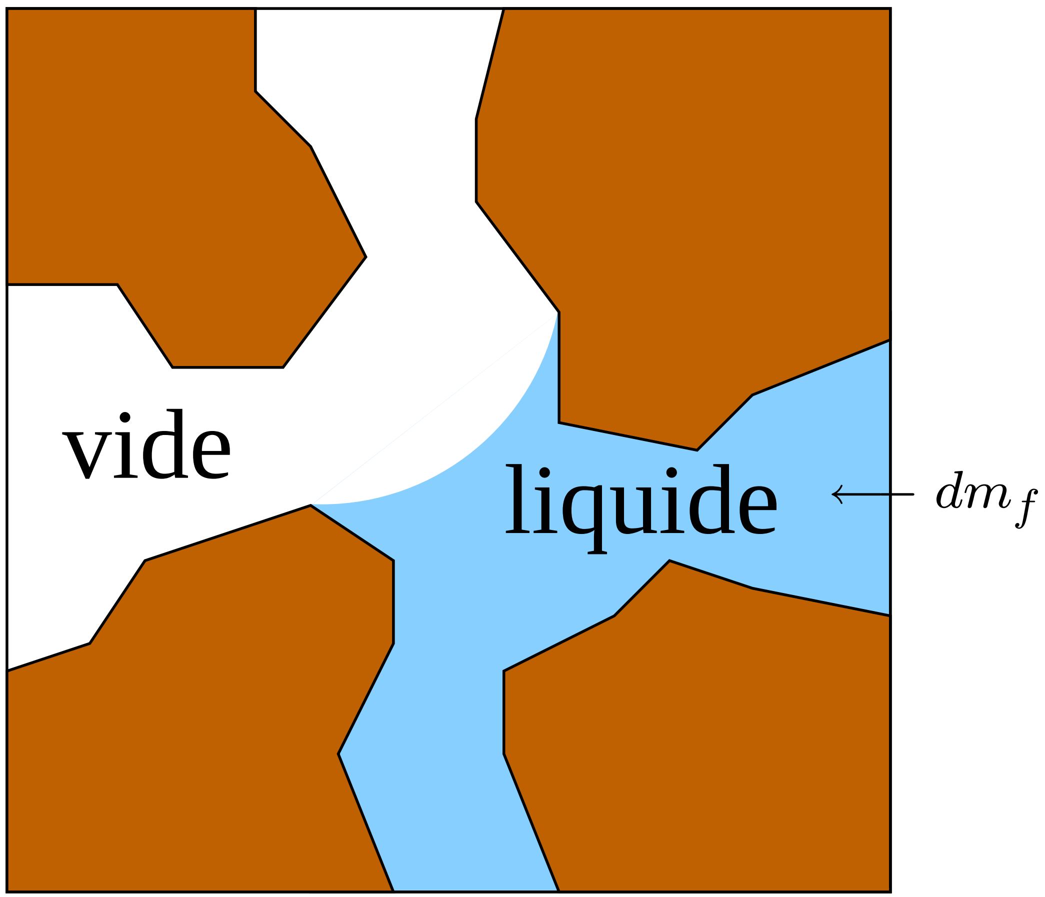
- Pour un gaz réel : $g = g_0 + \frac{RT}{M} \ln\left(\frac{f}{p_0}\right)$ $\qquad f =$ fugacité



Interactions attractives :
$g < g_{\text{parfait}} \qquad (f < p)$

Interactions répulsives :
$g > g_{\text{parfait}} \qquad (f > p)$

Le VER de milieu poreux est un système thermodynamique ouvert

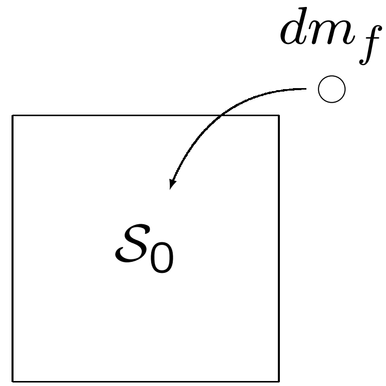


Thermodynamique (suite)
généralisation aux systèmes ouverts

- Premier principe :

$$dE = dE_0 + \boxed{e_f dm_f}$$

$$dE_0 = \delta W_{ext} + \boxed{\delta \mathsf{w}_f} + \delta Q$$



- Second principe : $dS \geq \frac{\delta Q}{T} + s_f dm_f$

- Inégalité fondamentale de Clausius-Duhem ($T = \text{cste}$) :

$$d\Psi \leq \delta W^{ext} + \delta \mathsf{w}_f + \psi_f dm_f$$

Le potentiel chimique

- Cas d'un système idéal (pas de forces d'interactions solide-liquide) :

$$\delta \mathsf{w}_f = p\frac{dm_f}{\rho}$$

on a $d\Psi \leq \delta W^{ext} + \underbrace{(\psi_f + \frac{p}{\rho})}_{g_f} dm_f$

- Cas général (interaction électrostatique, etc. . .) on pose

$$\delta \mathsf{w}_f + \psi_f dm_f = \mu_f dm_f$$

$$\boxed{\mu_f = \text{potentiel chimique}}$$

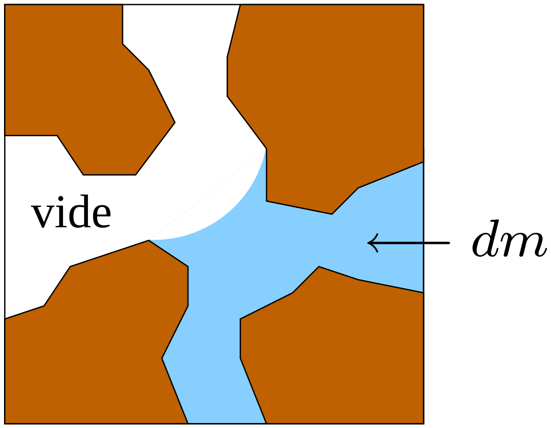
Inégalité fondamentale de Clausius-Duhem : $\boxed{d\Psi \leq \delta W^{ext} + \mu_f dm_f}$

Application à un VER de milieu poreux

- Application au VER du milieu poreux :

$$d\Psi \leq \delta W^{ext} + \mu_f dm_f$$

$$\delta W^{ext} = \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\epsilon}}$$



- Application au fluide seul contenu dans le VER :

$$d(m_f \psi_f) = -pd\phi + g_f dm_f \qquad (\delta W_f^{ext} \geq -pd\phi)$$

- Pas d'interaction solide-liquide : $\mu_f = g_f$

- Appellons $\Psi_s = \Psi - m_f \psi_f$ d'où :

$$d\Psi_s \leq \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\epsilon}} + pd\phi$$

$\boxed{\Psi_s ?}$

Energie libre du squelette solide

$$\Psi_s = \Psi - m_f \psi_f$$

Bilan d'énergie libre du squelette solide :

$$d\Psi_s \leq \underbrace{\underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\epsilon}} + p d\phi}_{\delta W_s}$$

En réversible on a :

$$d\Psi_s = \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\epsilon}} + p d\phi$$

Ψ_s est donc une fonction d'état du squelette, fonction de $(\underline{\underline{\epsilon}}, \phi)$. Les équations d'état s'écrivent:

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}}\right)_{\phi,T}} \qquad \boxed{p = \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi}\right)_{\underline{\underline{\epsilon}},T}}$$

Elles expriment les lois de comportement poroélastique du squelette solide.

Poroélasticité

Maurice Anthony Biot (1905 - 1985)

M.A. Biot, *General theory of three-dimensional consolidation*, Journal of Applied Physics 12, 155-164 (1941)

Le comportement poroélastique général

Les lois détat

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}}\right)_\phi} \qquad \boxed{p = \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi}\right)_{\underline{\underline{\epsilon}}}}$$

peuvent s'écrire autrement en introduisant le potentiel $G_s = \Psi_s - p\phi$ fonction de $(\underline{\underline{\epsilon}}, p)$:

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \left(\frac{\partial G_s}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}}\right)_p} \qquad \boxed{\phi = -\left(\frac{\partial G_s}{\partial p}\right)_{\underline{\underline{\epsilon}}}}$$

différentions ces équations:

$$
\begin{aligned}
d\underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{\underline{\underline{C_o}}}}(\underline{\underline{\epsilon}}, p) : d\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\epsilon}}, p)dp \\
d\phi &= \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\epsilon}}, p) : d\underline{\underline{\epsilon}} + N(\underline{\underline{\epsilon}}, p)dp
\end{aligned}
$$

avec

$$
\underline{\underline{\underline{\underline{C_o}}}} = \frac{\partial^2 G_s}{\partial \underline{\underline{\epsilon}} \partial \underline{\underline{\epsilon}}} \qquad \underline{\underline{B}} = -\frac{\partial^2 G_s}{\partial \underline{\underline{\epsilon}} \partial p} \qquad N = -\frac{\partial^2 G_s}{\partial p^2}
$$

les symétries habituelles

$$
C_{o_{ijkl}} = C_{o_{jikl}} = C_{o_{ijlk}} = C_{o_{klij}} \qquad B_{ij} = B_{ji}
$$

et

$$
\frac{\partial C_{o_{ijkl}}}{\partial p} = -\frac{\partial B_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} \qquad \frac{\partial B_{ij}}{\partial p} = \frac{\partial N}{\partial \epsilon_{kl}}
$$

Signification physique des coefficients

Lors d'évolutions drainées i.e. $p = 0$ on a

$$d\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C_o}}}} : d\underline{\underline{\epsilon}} \qquad d\phi = \underline{\underline{B}} : d\underline{\underline{\epsilon}}$$

- $\underline{\underline{\underline{\underline{C_o}}}}$: tenseur d'élasticité drainé

Lors d'évolutions isochores $\underline{\underline{\epsilon}} = 0$ on a

$$d\underline{\underline{\sigma}} = -\underline{\underline{B}}dp \qquad d\phi = Ndp$$

- $\underline{\underline{B}}$: tenseur de Biot (sans dimension)

- N: mesure la "compressibilité" des pores (Pa^{-1})

Poroélasticité isotrope linéaire

L'isotropie implique l'absence de direction privilégiée : $\Psi_s(I_1, I_2, I_3, \phi)$. La linéarité permet de ne retenir qu'un développement de Ψ_s au second ordre en $\underline{\underline{\epsilon}}$ et $\delta\phi = \phi - \phi_0$. On obtient

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \lambda_o \mathrm{tr}\underline{\underline{\epsilon}}\,\underline{\underline{1}} + 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} - bp\underline{\underline{1}} \\ \delta\phi &= b\mathrm{tr}\underline{\underline{\epsilon}} + Np \end{aligned}$$

- λ_o est le coefficient de Lamé drainé
- b est le coefficient de Biot

On voit que le comportement déviatorique n'est pas affecté par la pression du fluide

$$\underline{\underline{s}} = 2\mu\underline{\underline{e}}$$

- μ est le module de cisaillement du milieu poreux qu'il soit sec ou saturé

Le module de Biot

En plus des H.P.P. on considère l'hypothèse suivante :

$$\|\rho - \rho_0\|/\rho_0 \ll 1$$

Expérimentalement il est plus facile de mesurer les variations de masse fluide δm_f que les variations de porosité $\delta\phi$. La relation entre ces deux variations est donnée par

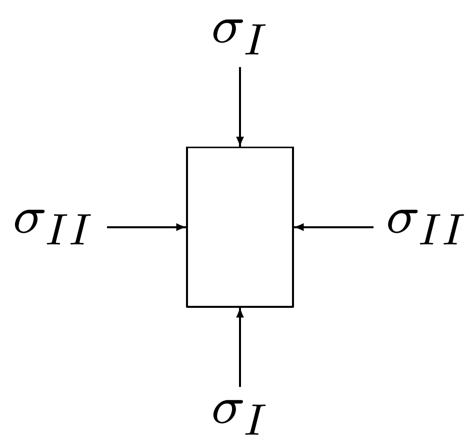
$$\delta m_f = \rho_0 \delta\phi + \phi_0 \delta\rho = \rho_0 (b \mathrm{tr} \underline{\underline{\epsilon}} + \underbrace{(N + \frac{\phi_0}{K_f})}_{\frac{1}{M}} p)$$

où K_f est le module de compression du fluide. M est appelé le module de Biot.

$$\frac{1}{M} = N + \frac{\phi_0}{K_f}$$

Principe de détermination expérimentale des coefficients λ_o, μ, b, M

Il repose sur des expériences de chargement triaxiaux *drainés* ($p = 0$) et *non drainés* ($\delta m_f = 0$).



1. Chargement déviatorique
   $$\sigma_I - \sigma_{II} = 2\mu(\epsilon_I - \epsilon_{II})$$

2. Compression isotrope drainée ($\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$)
   $$\begin{aligned} \sigma_I &= K_o(\epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III}) \\ \delta m_f &= \rho_0 b(\epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III}) \end{aligned} \qquad K_o = \lambda_o + \frac{2}{3}\mu$$

   K_o = Module de compression drainé

3. Compression isotrope non drainée
   $$\begin{aligned} p &= -Mb(\epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III}) = -B_s\sigma_I \\ \sigma_I &= K_u(\epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III}) \end{aligned} \qquad \left| \begin{aligned} B_s &= \frac{Mb}{K_u} \\ K_u &= K_o + Mb^2 \end{aligned} \right.$$

   B_s = coef. de Skempton K_u = Module de compression non drainé

Hypothèse des contraintes effectives (Terzaghi)

Supposons que dans les évolutions considérées du matériaux, la déformation volumique du constituant solide (ϵ_s) soit négligeable devant la variation de la porosité $\delta\phi$. On sait alors que

$$\mathrm{tr}\underline{\underline{\epsilon}} = \delta\phi$$

Or dans le cas général on a vu que

$$d\phi = \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\epsilon}}, p) : d\underline{\underline{\epsilon}} + N(\underline{\underline{\epsilon}}, p)dp$$

Cela implique alors que

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{1}} \qquad ; \qquad N = 0$$

et

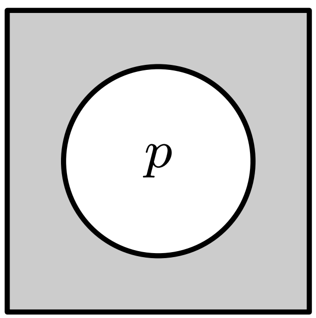
$$d(\underline{\underline{\sigma}} + p\underline{\underline{1}}) = \underline{\underline{\underline{\underline{C_o}}}}(\underline{\underline{\epsilon}}) : d\underline{\underline{\epsilon}}$$

Cas d'une matrice élastique isotrope linéaire microscopiquement homogène

b et N ?

Chargement isotrope

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$



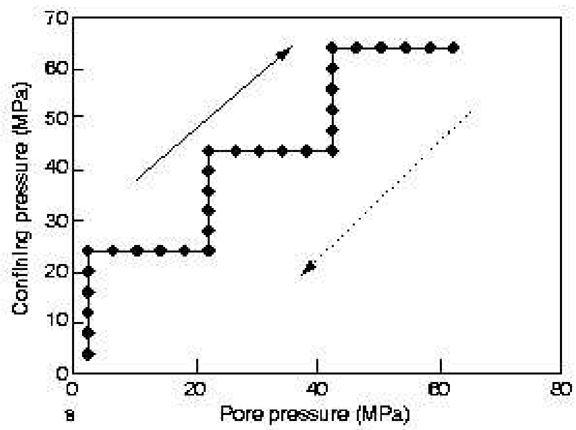
$$\Rightarrow \quad \epsilon_{kk} = \frac{\delta V}{V} = \frac{\delta \phi}{\phi} = -\frac{p}{K_s}$$

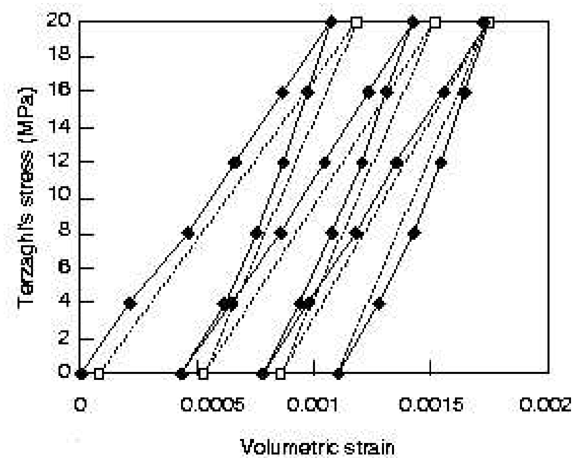
$$\Downarrow$$

$$\boxed{b = 1 - \frac{K_o}{K_s}} \qquad \boxed{N = \frac{b-\phi_0}{K_s}} \qquad \boxed{\frac{1}{M} = \frac{b-\phi_0}{K_s} + \frac{\phi_0}{K_f}}$$

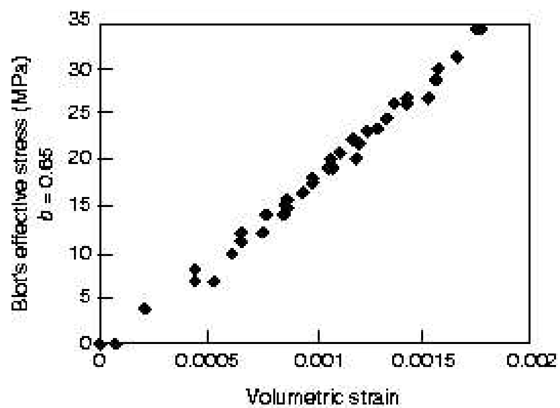
Le calcaire de Tavel

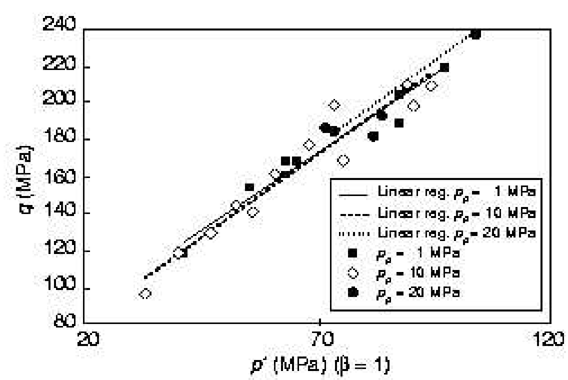
M. Bouteca and Y. Guéguen, *Mechanical Properties of Rocks: Pore Pressure and Scale Effects*, Oil & Gas Science and Technology - Rev. IFP, vol. 54, No. 6, pp. 703-714 (1999)





Rupture





Résolution de problèmes aux limites

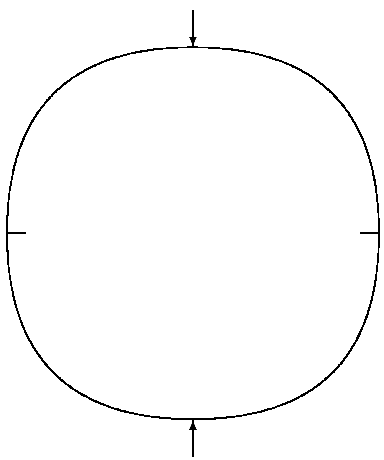
Structure d'un problème poroélastique

Nature	Formulation	Nb. d'inc.	Nb. d'equ.
Conservation de la masse fluide	$\frac{\partial m_f}{\partial t} = -\mathrm{div}\underline{w}$	4 $(m_f, \underline{w})$	1
Équation d'équilibre	$\mathrm{div}\underline{\underline{\sigma}} + (m_s + m_{f_0})\underline{g} = 0$	6 $(\underline{\underline{\sigma}})$	3
Poroélasticité	$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda_o \mathrm{tr}\underline{\underline{\epsilon}}\,\underline{\underline{1}} + 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} - bp\underline{\underline{1}}$ $\delta m_f = \rho_0(b\mathrm{tr}\underline{\underline{\epsilon}} + \frac{p}{M})$	7 $(\underline{\underline{\epsilon}}, p)$	7
Loi de Darcy	$\underline{w} = \rho_0 \underline{\underline{k}} \cdot (-\underline{\nabla p} + \rho_0 \underline{g})$	0	3
Compatibilité	$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla \xi}} + {}^t\underline{\underline{\nabla \xi}})$	3 $(\underline{\xi})$	6
	total	20	20

Conditions aux limites

Mécanique

$$\xi_i = \xi_i^d \qquad (S_{\xi_i})$$

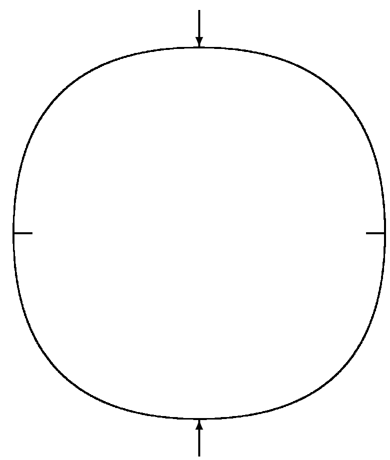


$$\sigma_{ij} n_j = T_i^d \qquad (S_{T_i})$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} S_{T_i} \cup S_{\xi_i} & = & \partial\Omega \\ S_{T_i} \cap S_{\xi_i} & = & \emptyset \end{array} \right.$$

Hydraulique

$$\underline{w} \cdot \underline{n} = w_f^d \qquad (S_w)$$



$$p = p^d \qquad (S_p)$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} S_p \cup S_w & = & \partial\Omega \\ S_p \cap S_w & = & \emptyset \end{array} \right.$$

Conditions initiales

On suppose l'équilibre mécanique et hydraulique à $t = 0$.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 \ ; \ p = p_0 \ ; \ \rho = \rho_0 \ ; \ \underline{\xi} = 0 \ ; \ \phi = \phi_0 \ ; \ \underline{w} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\underline{\underline{\sigma}}_0 + (m_s + m_f)\underline{g} &= 0 \\ -\underline{\nabla p_0} + \rho_0 \underline{g} &= 0 \end{aligned}$$

Théorème de superposition

La solution du problème est symbolisé par $\mathcal{S}(t) = (\underline{\underline{\sigma}}, p, \underline{\xi}, m_f, \underline{w})(t)$. Le chargement l'est par $\mathcal{C}(t) = (T_i^d, p^d, \xi_i^d, w_f^d, \underline{g})(t)$. La linéarité du problème s'exprime par la linéarité de l'application

$$\{\mathcal{C}(t); \tau < t\} \longrightarrow \mathcal{S}(t)$$

Alors si

$$\mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_1 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{S}_2$$

alors

$$\lambda_1 \mathcal{C}_1 + \lambda_2 \mathcal{C}_2 \longrightarrow \lambda_1 \mathcal{S}_1 + \lambda_2 \mathcal{S}_2$$

Méthode de résolution directe en $(\underline{\xi}, p)$

On postule une forme (paramétrée) des champs $\underline{\xi}(\underline{x}, t)$ et $p(\underline{x}, t)$. On calcule $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}, t)$ puis $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$, $\delta m_f(\underline{x}, t)$ et $\underline{w}(\underline{x}, t)$ par les lois de comportement.

On tente de satisfaire l'équation d'équilibre, l'équation de conservation de la masse fluide et les conditions aux limites.

Problème à court terme

Supposons que le chargement soit discontinu à $t = 0$

$$\mathcal{C}(0^+) \neq 0$$

Alors la solution $\mathcal{S}(0^+)$ est telle que

$$\lim_{t \to 0} \delta m_f(t) = \lim_{t \to 0} \int_0^t -\text{div}\underline{w}(\tau) d\tau = 0$$

car $\underline{w}(\underline{x}, \tau)$ est fini du fait de la viscosité du fluide. Donc $\delta m_f(0^+) = 0$: *la réponse est non drainée*. En conséquence

$$\begin{cases} \text{div}\underline{\underline{\sigma}} + (m_s + m_{f_0})\underline{g}(0^+) = 0 \\ \underline{\underline{\sigma}} = \lambda_u \text{tr}\underline{\underline{\epsilon}}\,\underline{\underline{1}} + 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} \\ \sigma_{ij} n_j = T_i^d(0^+) \text{ sur } S_{T_i} \\ \xi_i = \xi_i^d(0^+) \text{ sur } S_{\xi_i} \end{cases}$$

La solution en $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\xi})$ est indépendante des données hydrauliques.

Le problème mécanique à court terme est découplé du problème hydraulique

Mais $p(0^+) = -Mb\text{tr}\underline{\underline{\epsilon}}$ (en général ne respecte pas les C.L.).

Problème à long terme

Supposons que

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{C}(t) = \mathcal{C}_\infty$$

Alors la solution correspondante $\mathcal{S}_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} \mathcal{S}(t)$ est telle que

$$\begin{cases} \text{div}\underline{w} = 0 \\ \underline{w} = \rho_0 \underline{\underline{k}} \cdot (-\underline{\nabla p}(\infty) + \rho_0 \underline{g}(\infty)) \end{cases}$$

Le probème hydraulique est indépendant des données mécaniques

Le problème hydraulique à long terme est découplé du problème mécanique

Le problème mécanique dépend en revanche de la réponse hydraulique

$$\begin{cases} \text{div}\underline{\underline{\sigma}} + (m_s + m_{f_0})\underline{g}(\infty) = 0 \\ \underline{\underline{\sigma}} = \lambda_o \text{tr}\underline{\underline{\epsilon}}\,\underline{\underline{1}} + 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} - bp(\infty)\underline{\underline{1}} \\ \sigma_{ij} n_j = T_i^d(\infty) \text{ sur } S_{T_i} \\ \xi_i = \xi_i^d(\infty) \text{ sur } S_{\xi_i} \end{cases}$$

Remarque

La solution stationnaire n'existe que si les conditions aux limites hydrauliques sont compatibles avec

$$\int_{\partial\Omega} \underline{w} \cdot \underline{n} da = 0$$

Processus et temps caractéristique de diffusion

On obtient une équation différentielle (de type Navier) sur $\underline{\xi}$ et p en reportant la loi de comportement poroélastique

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda_o \mathrm{tr}\underline{\underline{\epsilon}}\,\underline{\underline{1}} + 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} - bp\underline{\underline{1}}$$

dans l'équation d'équilibre, soit

$$\lambda_o \underline{\nabla \epsilon} + 2\mu \mathrm{div}\underline{\underline{\epsilon}} - b\underline{\nabla p} = 0 \qquad (\epsilon = \mathrm{tr}\underline{\underline{\epsilon}})$$

En appliquant l'opérateur div, on obtient

$$(\lambda_o + 2\mu)\Delta\epsilon = b\Delta p$$

d'où successivement

$$\Delta(\delta m_f) = \rho_0 \frac{1}{M}\frac{\lambda_u + 2\mu}{\lambda_o + 2\mu}\Delta p \qquad (\lambda_u = \lambda_o + Mb^2)$$

et

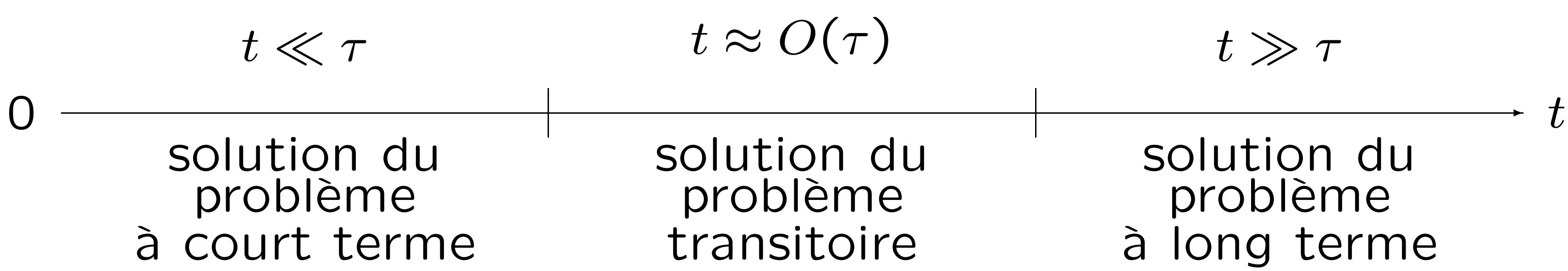
$$\frac{\partial(\delta m_f)}{\partial t} = c_m \Delta(\delta m_f) \qquad (c_m = kM\frac{\lambda_o + 2\mu}{\lambda_u + 2\mu})$$

suite . . .

À cette équation de diffusion est associé un temps caractéristique de diffusion

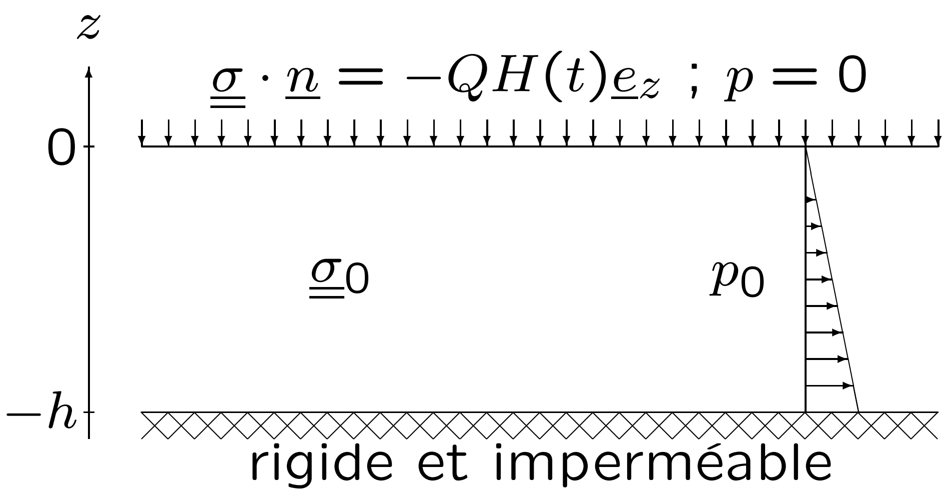
$$\tau = \frac{L^2}{c_m}$$

où L est une longueur caractéristique du problème. Le temps caractéristique τ caractérise la période de transition entre le problème à court terme et le problème à long terme. Ainsi on a



Exemples

Exemple 1 : consolidation d'une couche



- $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \delta\underline{\underline{\sigma}}(z,t)$
- $p = p_0 + \delta p(z,t)$
- $\underline{\xi} = \xi(z,t)\underline{e}_z$
- $\boxed{\delta\sigma_{zz} = -Q}$

- Instantanément à $t = 0^+$, $\delta m_f(0^+) = 0$:

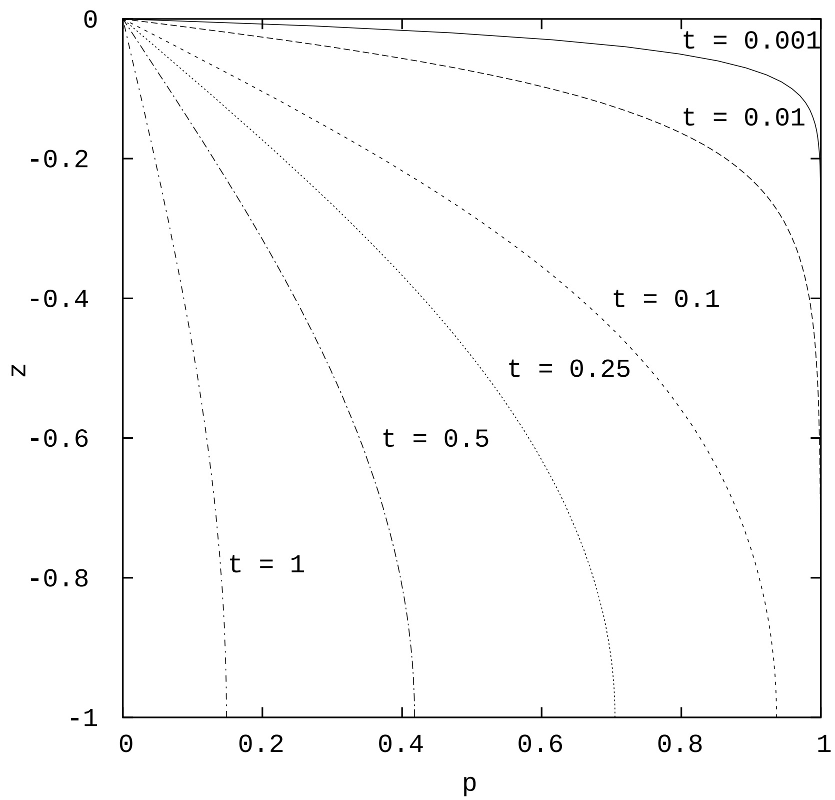
$$\xi_{,z}(z,0^+) = \frac{\delta\sigma_{zz}}{\lambda_u + 2\mu} \qquad p(z,0^+) = -Mb\xi_{,z}$$

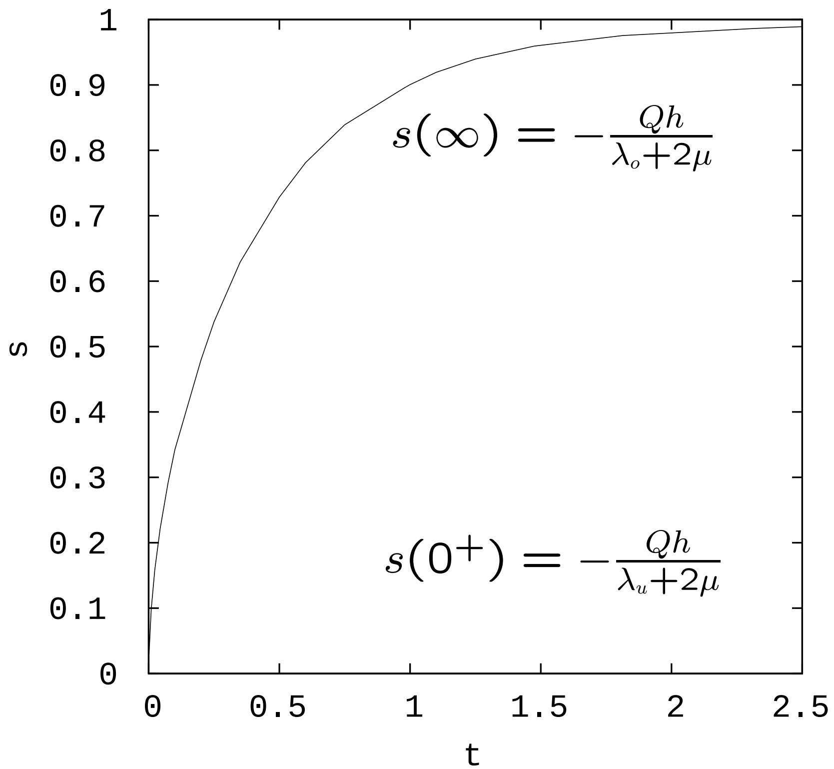
Exemple 1 suite ...

- Puis :

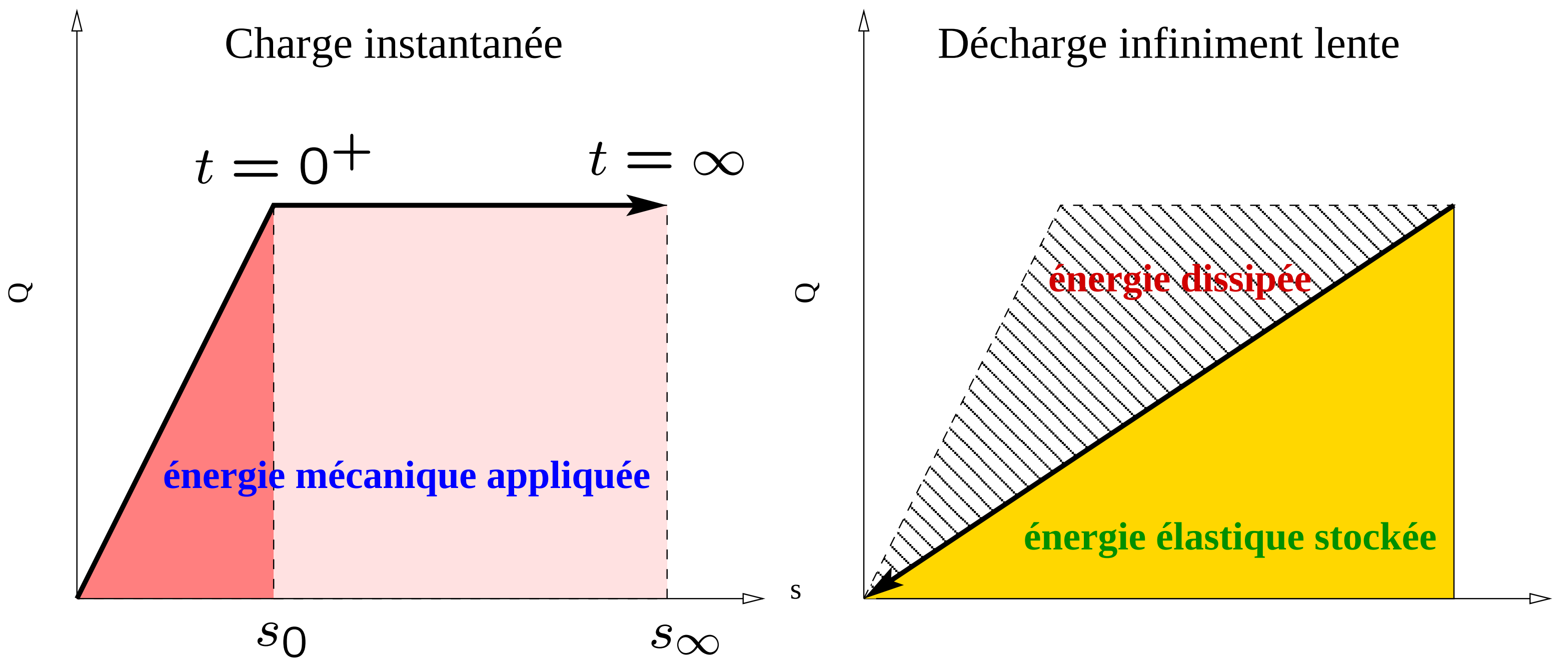
$$\frac{\partial p}{\partial t} = c_m \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \qquad p(0,t) = \frac{\partial p}{\partial z}(-h,t) = 0 \qquad p(z,0^+) = \frac{MbQ}{\lambda_u + 2\mu}$$

tassement $s(t) = -\xi(0,t)$





Exemple 1 suite . . .



Milieu infini et champ de déplacements irrotationnels

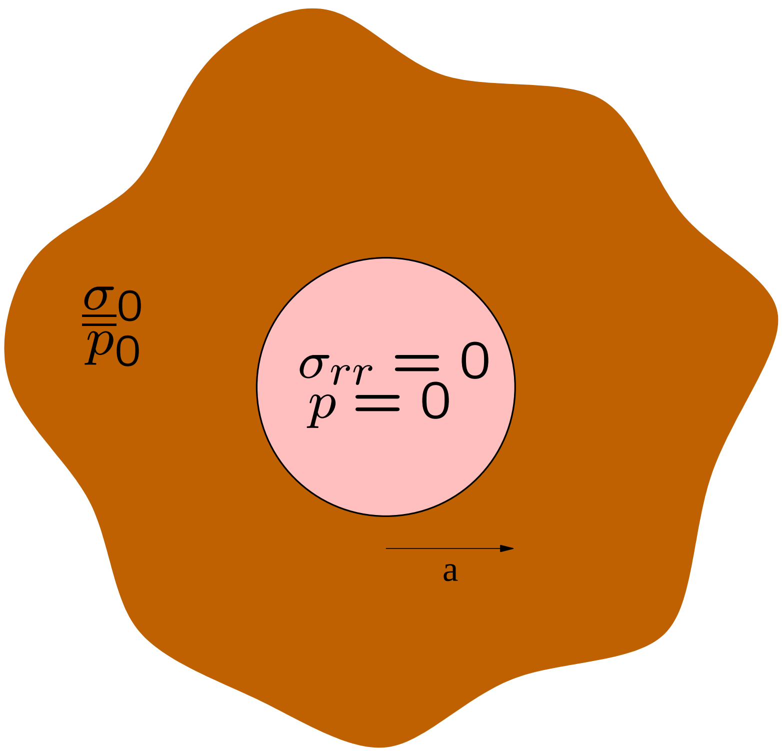
L'équation d'équilibre implique $(\lambda_o + 2\mu)\epsilon = bp$. D'où

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c_m \Delta p$$

Par exemple en cylindrique :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c_m \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial p}{\partial r}\right)$$

Exemple 2 : creusement d'un puits

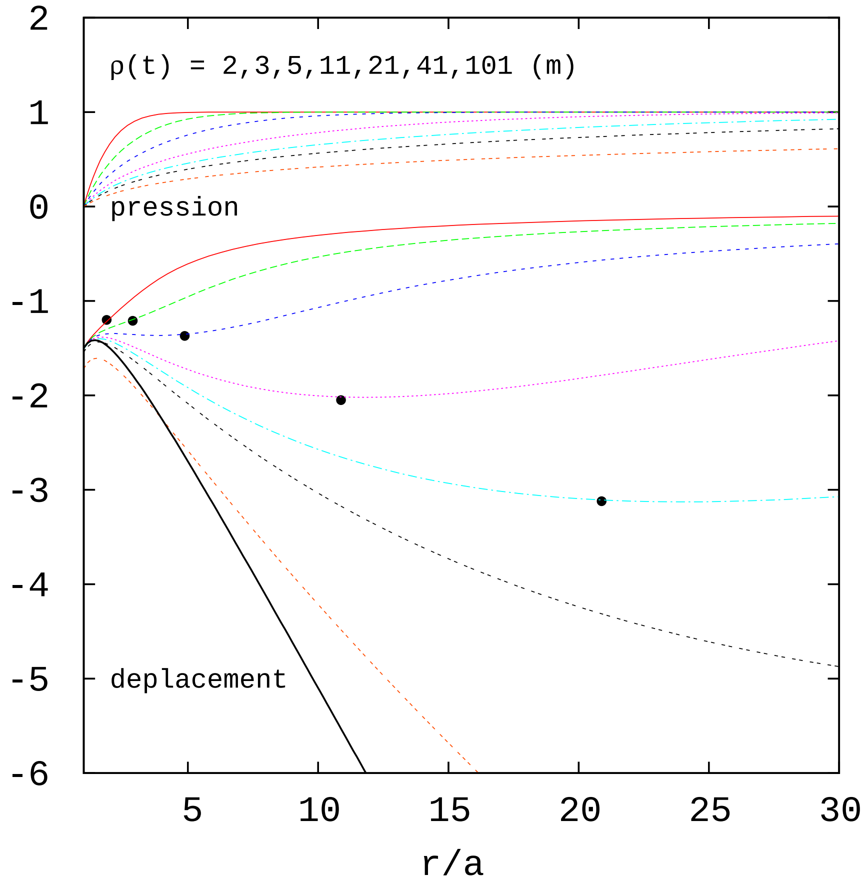


$\frac{\partial p}{\partial t} = c_m \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)$
C.L. $p(a,t) = 0$
C.I. $p(r,0) = p_0$

$\rho(t) = a + \sqrt{c_m t}$: rayon caractéristique.

- pour $r \ll \rho(t)$:
  solution à long terme :
  $p(r,t) = 0$
- pour $r \gg \rho(t)$:
  solution à court terme :
  $\delta m_f(r,t) = 0$

Exemple 2 suite . . .



- pour $r \ll \rho(t)$: $p = 0$

$$\xi = \frac{\sigma_0}{2\mu}\frac{a^2}{r} - \frac{bp_0}{\lambda+2\mu}\frac{a}{2}\left(\frac{r}{a} - \frac{a}{r}\right)$$

- pour $r \gg \rho(t)$: $\delta m_f = 0$

$$\xi = \frac{\alpha(t)}{r}$$