

Approche énergétique du comportement mécanique des matériaux poreux non saturés

Patrick Dangla*

1 Introduction

Initié par les travaux de M. A. Biot ([4], [5], [6], [7]) la formulation macroscopique des lois de comportement des matériaux saturés déformables repose aujourd'hui sur des concepts généraux bien établis. La théorie de la poroélasticité de M. A. Biot est la théorie de référence sur laquelle tous les chercheurs se fondent aujourd'hui pour développer leurs nouvelles recherches. Elle permet notamment de reconduire pour les matériaux saturés les modèles de comportement classiques de la mécanique des solides, *i.e.* plastique, visco-plastique, etc., au prix d'une généralisation des concepts se justifiant de façon rigoureuse dans le cadre de la thermodynamique des milieux poreux déformables [29], [15], [16].

En revanche la formulation macroscopique des lois de comportement des matériaux non saturés ne repose pas encore sur des concepts généraux faisant l'unanimité, même si de grandes avancées ont pu être accomplies notamment dans le cas des sols [1]. L'approche énergétique peut contribuer à clarifier ces concepts. Celle présentée ici, développée *in extenso* pour la poroélasticité non linéaire, constitue une extension au cas non saturé de l'approche énergétique de M.A. Biot du comportement mécanique des matériaux poreux saturés.

2 Equations d'état d'un fluide

Les interactions microscopiques auxquelles est soumis un fluide au sein de l'élément de sol seront supposées s'exercer à travers ses seules interfaces com-

*Laboratoire Central des Ponts et Chaussées 58 bd Lefèbre 75732 Paris, France e-mail: dangla@lcpc.fr

munes avec les autres constituants du sol. Les équations usuelles d'état d'un fluide sont alors conservées pour les fluides constitutifs, eau liquide, vapeur d'eau et air sec, d'un sol non saturé. L'état thermodynamique du fluide peut alors être décrit à l'aide des mêmes potentiels et variables d'état usuelles, de pression, température, volume spécifique et entropie.

2.1 Potentiels thermodynamiques

D'après le premier et le second principes de la thermodynamique, pour toute évolution réversible ou irréversible (si le fluide est visqueux), on démontre la relation différentielle:

$$de = -pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + Tds \quad (1)$$

où e représente l'énergie interne spécifique du fluide, p la pression thermodynamique, ρ la masse volumique, T la température et s l'entropie spécifique. Il est parfois préférable de faire apparaître l'énergie libre spécifique ψ définie par:

$$\psi = e - Ts \quad (2)$$

et pour laquelle il vient:

$$d\psi = -pd\left(\frac{1}{\rho}\right) - sdT \quad (3)$$

De (3) on déduit les équations d'état:

$$p = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}\right)_T \quad s = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial T}\right)_{\frac{1}{\rho}} \quad (4)$$

qui s'inversent partiellement sous la forme:

$$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_T \quad s = -\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_p \quad (5)$$

où g est l'enthalpie libre ou potentiel de Gibbs spécifique défini par:

$$g = \psi + \frac{p}{\rho} \quad (6)$$

Dans la suite la vapeur d'eau (indice v) et l'air sec (indice a) seront considérés comme des gaz parfaits et les équations d'état précédentes s'explicitent en:

$$p_\alpha = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}_\alpha} \rho_\alpha T \quad s_\alpha = s_{\alpha 0} + C_{p\alpha} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}_\alpha} \ln\left(\frac{p_\alpha}{p_{\alpha 0}}\right) \quad (7)$$

où $\mathcal{R}$, $\mathcal{M}_\alpha$ et $C_{p\alpha}$ sont respectivement la constante des gaz parfaits, la masse molaire et la chaleur spécifique à pression constante du gaz, $\alpha = v$ ou a , tandis que l'indice 0 indique une valeur prise dans un état de référence. Les variations de volume de l'eau liquide (indice l) seront par la suite supposées négligeables et l'on écrira :

$$\rho_l = \text{Cste} \quad s_l = s_{l0} + C_{pl} \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) \quad (8)$$

2.2 Equation d'équilibre entre l'eau liquide et sa vapeur

L'équilibre thermodynamique entre l'eau liquide et sa vapeur correspond à l'égalité de leur potentiel de Gibbs respectif (voir par exemple [3], [10]):

$$g_v(T, p_v) = g_l(T, p_l) \quad (9)$$

Si cet équilibre est supposé conservé dans toutes les évolutions, la différentiation de (9) et les équations d'état (5) entraînent :

$$\frac{dp_v}{\rho_v} - \frac{dp_l}{\rho_l} = (s_v - s_l) dT \quad (10)$$

L'intégration de l'équation précédente, les relations (7) et (8) fournissent la relation d'équilibre entre l'eau liquide et sa vapeur sous la forme explicite :

$$p_l - p_{atm} = \rho_l \frac{\mathcal{RT}}{\mathcal{M}_v} \ln \left(\frac{p_v}{p_{vs}(T)} \right) \quad (11)$$

Dans (11) $p_{vs}(T)$ est la pression de vapeur saturante à la température T lorsque la pression de l'eau liquide est égale à la pression atmosphérique p_{atm} . Son expression est donnée par :

$$\frac{p_{vs}(T)}{p_{0vs}} = \exp \left[\frac{\mathcal{M}_v}{\mathcal{RT}} \left(\frac{\mathcal{L}_0}{T_0} (T - T_0) + (C_{pl} - C_{pv}) \left(T - T_0 - T \ln \frac{T}{T_0} \right) \right) \right] \quad (12)$$

où p_{0vs} et $\mathcal{L}_0 = T_0 (s_{v0} - s_{l0})$ sont respectivement la pression de vapeur saturante et la chaleur latente de changement de phase à la température T_0 .

3 Bilans d'énergie et d'entropie entre les états d'équilibre du matériau non saturé

3.1 Bilans pour l'élément de matériau considéré comme un système ouvert

Dans les bilans qui suivent la complexité d'un élément de matériau non saturé est ramenée à un squelette solide dont l'espace poreux interstitiel est saturé

par une phase liquide d'eau et par un mélange gazeux, ce dernier étant formé d'air sec et de vapeur d'eau. Soumis à des actions externes, un élément infinitésimal $d\Omega$ de matériau se déforme et subit des variations des masses fluides qu'il contient. Soit ainsi ϵ_{ij} , les composantes du tenseur des déformations du matériau identifiées à celles de son squelette solide. Soit aussi σ_{ij} les composantes du tenseur des contraintes (totales) reprises par l'ensemble des éléments constitutifs du matériau. Soit enfin m_α , la masse du fluide α ($= l, v$ ou a) par unité de volume de l'élément $d\Omega$. Si δQ et δm_α sont respectivement la chaleur et la masse de fluide α fournies par l'extérieur à l'unité de volume $d\Omega$ entre les instants t et $t + dt$, un bilan d'énergie appliqué au système ouvert $d\Omega$ conduit à :

$$dE = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} + \delta Q + \left(e_\alpha + \left(\frac{p}{\rho} \right)_\alpha \right) \delta m_\alpha \quad (13)$$

où, comme par la suite, la sommation sur les indices répétés latins ou grecs est sous-entendue. A travers le bilan précédent le premier principe de la thermodynamique indique que la variation dE de l'énergie interne E par unité de volume $d\Omega$ est égale à la somme du travail de déformation de l'élément de matériau, terme $\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$, de la chaleur fournie par l'extérieur, terme δQ , et de l'énergie interne convectivement apportée par chacune des masses fluides α , terme $e_\alpha \delta m_\alpha$, augmentée du travail nécessaire à l'introduction des masses dans le volume $d\Omega$, terme $\left(\frac{p}{\rho} \right)_\alpha \delta m_\alpha$. En notant S l'entropie par unité de volume de l'élément $d\Omega$, un bilan d'entropie fourni par le second principe conduit à :

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} + s_\alpha \delta m_\alpha \quad (14)$$

Du fait d'une production interne d'entropie liée aux irréversibilités éventuelles des évolutions de l'élément de matériau, le second principe de la thermodynamique indique que la variation d'entropie dS du système ouvert $d\Omega$ est supérieure à l'entropie qui lui est apportée par l'extérieur, somme de l'entropie apportée par conduction, terme $\frac{\delta Q}{T}$, et de l'entropie apportée par convection, terme $s_\alpha \delta m_\alpha$.

L'élimination de δQ entre les deux bilans précédents donne :

$$\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} + g_\alpha \delta m_\alpha - S dT - d\Psi \geq 0 \quad (15)$$

où Ψ est l'énergie libre par unité de volume du système ouvert $d\Omega$:

$$\Psi = E - TS \quad (16)$$

Du fait des changements de phase de l'eau liquide en sa vapeur, on peut écrire :

$$dm_l = \delta m_l - \delta m_{l \rightarrow v} \quad dm_v = \delta m_v + \delta m_{l \rightarrow v} \quad dm_a = \delta m_a \quad (17)$$

où $\delta m_{l \rightarrow v}$ représente la masse d'eau liquide par unité de volume qui s'est transformée en vapeur entre les instants t and $t + dt$. On en déduit:

$$\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} + g_l dm_l + g_v dm_v + g_a dm_a - SdT - d\Psi + (g_l - g_v) \delta m_{l \rightarrow v} \geq 0 \quad (18)$$

Dans l'équation précédente $(g_l - g_v) \delta m_{l \rightarrow v}$ représente la dissipation éventuellement associée au changement de phase. Si l'on reconduit à l'échelle macroscopique, l'hypothèse d'un équilibre thermodynamique conservé dans toutes les évolutions, les équations (9) et (18) conduisent à l'inégalité de Clausius-Duhem:

$$\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} + g_l dm_l + g_v dm_v + g_a dm_a - SdT - d\Psi \geq 0 \quad (19)$$

Cette équation est analogue à l'équation de Gibbs-Duhem de la physico-chimie [3].

3.2 Bilan pour le squelette

Les bilans précédents ont concerné l'élément de matériau $d\Omega$ considéré comme un système thermodynamique ouvert. Comme les équations d'état des fluides (cf. section 2.1) sont connues indépendamment du comportement du matériau, il peut être intéressant d'établir des bilans pour le squelette considéré seul. Le squelette ne doit cependant pas se réduire au seul solide et il nous faut préciser ce que nous entendons par squelette. À l'échelle microscopique les phases solide, liquide et gaz sont disjointes. Il est connu depuis longtemps qu'un liquide et un gaz en présence sont séparés par une couche mince dite superficielle dont les propriétés sont nettement différentes des propriétés des deux phases volumiques. Tout se passe, au plan mécanique, comme si les deux fluides étaient séparés par une membrane sans épaisseur et uniformément tendue. On note alors γ_{lg} la tension superficielle à l'interface liquide-gaz¹. Le même phénomène existe aussi entre un solide et un fluide. Une couche superficielle d'épaisseur négligeable sépare ainsi le solide du liquide et le solide du gaz. La tension superficielle dans l'interface solide-liquide est notée γ_{sl} . Dans l'interface solide-gaz elle est notée γ_{sg} . Ces trois interfaces liquide-gaz, solide-liquide et solide-gaz se raccordent le long d'une courbe sur la surface du solide².

Ces interfaces possèdent non seulement des propriétés mécaniques mais aussi des propriétés thermodynamiques [22]. À chaque interface on peut associer une énergie libre et une entropie. Notons Ψ_{int} et S_{int} l'énergie libre et

¹La tension de surface de l'eau (dans l'air) est de 0.07275 N/m à 20°C.

²Des considérations d'équilibre mécanique permettent de démontrer la relation $\gamma_{lg} \cos \theta = \gamma_{sg} - \gamma_{sl}$, où θ est l'angle dit de contact, c'est-à-dire l'angle formé entre le plan tangent à l'interface liquide-gaz et le plan tangent à la surface du solide.

l'entropie des trois interfaces. L'énergie libre et l'entropie étant des grandeurs extensives on peut écrire

$$\Psi = \Psi_{sol} + \Psi_{int} + m_\alpha \psi_\alpha \quad (20)$$

$$S = S_{sol} + S_{int} + m_\alpha s_\alpha \quad (21)$$

où Ψ_{sol} et S_{sol} représentent l'énergie et l'entropie du constituant solide.

Soit alors le potentiel Ψ_{sq} et l'entropie S_{sq} définis par [18], [13], [21]:

$$\Psi_{sq} = \Psi - m_\alpha \psi_\alpha \quad (22)$$

$$S_{sq} = S - m_\alpha s_\alpha \quad (23)$$

Comme Ψ et S représentent respectivement l'énergie libre et l'entropie de toute la matière contenue dans l'unité de volume $d\Omega$, Ψ_{sq} et S_{sq} représentent respectivement l'énergie libre et l'entropie du squelette. Le squelette (en omettant le mot solide) inclut ici non seulement le squelette solide, mais aussi les interfaces fluide-fluide et solide-fluide puisque par comparaison avec 20 et 21 nous avons

$$\Psi_{sq} = \Psi_{sol} + \Psi_{int} \quad (24)$$

$$S_{sq} = S_{sol} + S_{int} \quad (25)$$

On supposera que l'énergie libre par unité de surface de chaque interface $(\alpha\beta)$ ne dépend que de la température. Dans ce cas elle se confond alors avec la tension de surface $\gamma_{\alpha\beta}(T)$ [22]. Soit $\omega_{\alpha\beta}d\Omega$ l'aire de l'interface $(\alpha\beta)$ contenue dans le volume élémentaire $d\Omega$. On a alors la relation

$$\Psi_{int} = \gamma_{lg}\omega_{lg} + \gamma_{sl}\omega_{sl} + \gamma_{sg}\omega_{sg} \quad (26)$$

L'entropie par unité de surface de chaque interface étant donnée par $-\frac{d\gamma_{\alpha\beta}}{dT}$ on a aussi la relation

$$S_{int} = -\frac{d\gamma_{lg}}{dT}\omega_{lg} - \frac{d\gamma_{sl}}{dT}\omega_{sl} - \frac{d\gamma_{sg}}{dT}\omega_{sg} \quad (27)$$

Introduisons la porosité lagrangienne ϕ définie comme le volume de l'espace poreux par unité de volume de squelette de la configuration initiale de référence³.

³Cette porosité lagrangienne diffère de la porosité (eulérienne) n couramment introduite dans les ouvrages et que l'on peut relier à ϕ par l'expression $\phi = Jn$ où J est le déterminant du gradient de la transformation homogène tangente. La porosité lagrangienne est cependant la seule qui, comme le tenseur des déformations, se réfère à chaque instant au même système matériel. Il est en effet essentiel dans l'approche énergétique de caractériser les états d'énergie d'un système matériel que l'on suit à chaque instant dans son mouvement.

Introduisons également la porosité partielle (également lagrangienne) ϕ_α , relative au fluide α , telle qu'à tout instant $\phi_\alpha d\Omega$ représente le volume occupé par le fluide α . La porosité partielle de la vapeur et celle de l'air sec sont égales puisqu'ils constituent ensemble un mélange gazeux occupant le même espace. On peut ainsi écrire

$$m_\alpha = (\rho\phi)_\alpha \quad \phi_v = \phi_a = \phi_g \quad \phi = \phi_g + \phi_l \quad (28)$$

La combinaison des Eqs. (4), (6), (22), (23) et (28) entraîne que:

$$\sigma_{ij}d\epsilon_{ij} + p_l d\phi_l + p_g d\phi_g - S_{sq}dT - d\Psi_{sq} \geq 0 \quad (29)$$

où p_g est la pression totale du mélange gazeux:

$$p_g = p_v + p_a \quad (30)$$

L'équation (29) n'est autre que le bilan d'énergie libre du squelette tel que précédemment défini (*i.e.*, incluant les interfaces) et considéré seul. Cette relation indique très clairement que l'interaction mécanique entre le mélange gazeux et le squelette est gouverné uniquement par la pression totale du gaz p_g et non par les pressions partielles p_v et p_a . À déformation maintenue constante, $p_l d\phi_l + p_g d\phi_g$ représente le travail fourni au squelette par l'eau liquide et le mélange gazeux. Dans le cas isotherme l'inégalité (29) indique que seule la quantité $d\Psi_{sq}$ du travail $\sigma_{ij}d\epsilon_{ij} + p_l d\phi_l + p_g d\phi_g$ fourni au squelette sera emmagasinée sous forme d'énergie libre restituable par la suite, le reste étant dissipé sous forme de chaleur. Le bilan (29) montre par ailleurs que c'est le triplet des forces généralisées (σ_{ij}, p_l, p_g) qui gouverne (en partie dans le cas non réversible) les déformations et les porosités du matériau $(\epsilon_{ij}, \phi_l, \phi_g)$.

On peut réécrire le bilan précédent en introduisant les saturations S_l et S_g , respectivement en eau liquide et en mélange gazeux, définies par :

$$S_l = \frac{\phi_l}{\phi} \quad S_g = \frac{\phi_g}{\phi} \quad (31)$$

avec bien entendu $S_g = 1 - S_l$. Combinant (29) et (31), on obtient ainsi:

$$\sigma_{ij}d\epsilon_{ij} + (S_g p_g + S_l p_l)d\phi - \phi p_c dS_l - S_{sq}dT - d\Psi_{sq} \geq 0 \quad (32)$$

où p_c est la pression capillaire, définie comme la différence entre la pression du mélange gazeux et celle de l'eau liquide:

$$p_c = p_g - p_l \quad (33)$$

Parallèlement à (29), l'expression équivalente (32) du bilan d'énergie libre du squelette montre que l'on a mis en évidence la dualité entre les forces

généralisées $(\sigma_{ij}, (S_g p_g + S_l p_l), \phi p_c)$ et le triplet $(\epsilon_{ij}, \phi, S_l)$. C'est donc ces forces que l'on choisira pour gouverner les déformations du squelette solide c'est-à-dire (ϵ_{ij}, ϕ) et le degré de saturation en liquide S_l .

Le cas saturé consiste à imposer $S_l = 1$, $S_g = 0$ et $dS_l = 0$ dans (32), soit:

$$\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} + p_l d\phi - S_{sq} dT - d\Psi_{sq} \geq 0 \quad (34)$$

Le bilan précédent représente le bilan d'énergie libre du matériau saturé. Il montre, conformément aux résultats déjà acquis dans ce domaine, que ce sont les contraintes totales σ_{ij} et la pression du liquide p_l qui gouvernent les déformations et la porosité dans le cas saturé.

3.3 Cas des sols

Dans les conditions usuelles de sollicitations des sols, le volume du constituant solide ne varie pas de manière significative, par comparaison à la variation de volume subie par l'espace poreux. La déformation volumique ϵ_{ii} s'identifie alors au changement de porosité⁴:

$$\epsilon_{ii} \approx \phi - \phi_0 \quad (35)$$

où ϕ_0 est la valeur de la porosité initiale. Puisque $\phi = \phi_l + \phi_g$ seules deux variables sont alors indépendantes parmi le groupe $(\epsilon_{ii}, \phi_l, \phi_g)$. Avec le choix (ϵ_{ii}, ϕ_l) , l'hypothèse (35) et le bilan (29) entraînent que:

$$(\sigma_{ij} + p_g \delta_{ij}) d\epsilon_{ij} - p_c d\phi_l - S_{sq} dT - d\Psi_{sq} \geq 0 \quad (36)$$

Le cas saturé consiste à imposer $\phi_l = \phi$ et $d\phi_l = d\phi = d\epsilon_{ii}$ dans (36), soit:

$$(\sigma_{ij} + p_l \delta_{ij}) d\epsilon_{ij} - S_{sq} dT - d\Psi_{sq} \geq 0 \quad (37)$$

Le bilan précédent indique que ce sont les contraintes effectives $\sigma_{ij} + p_l \delta_{ij}$ qui gouvernent les déformations du sol dans le cas saturé et l'hypothèse de variations de volume négligeables du constituant solide. L'inéquation précédente correspond en effet à un solide ordinaire soumis aux contraintes $\sigma_{ij} + p_l \delta_{ij}$, d'entropie S_{sq} et d'énergie libre Ψ_{sq} .

Dans le cas non saturé le bilan (36) montre que, sous la même hypothèse de variations de volume négligeables du constituant solide, c'est le couple $(\sigma_{ij} + p_g \delta_{ij}, p_c)$ qui gouverne les déformations du squelette solide comme cela est maintenant admis [1].

⁴L'expression (35) repose sur la nature lagrangienne de la porosité. En effet, cette même expression écrite avec la porosité eulérienne n , donnée en petites déformations, par $\phi = (1 + \epsilon_{ii})n$, prend la forme

$$\epsilon_{ii} \approx \frac{n - n_0}{1 - n_0}$$

4 Equations d'état de la poroélasticité

4.1 Potentiel poroélastique pour le squelette

Dans le cas saturé la poroélasticité [31] correspond à la loi de comportement d'un matériau poreux se déformant réversiblement, en raison de l'élasticité de son constituant solide. Par extension au cas non saturé la poroélasticité (au sens strict) rendra en plus compte d'effets capillaires réversibles. Elle ne prendra donc pas en compte les phénomènes d'hystérésis associés à de tels effets. Ces effets seront analysés de manière spécifique à la section 5.4. Dans ces conditions de réversibilité complète, (32) doit être satisfaite pour toute évolution. La poroélasticité se caractérise donc par une dissipation intrinsèque nulle. Cela signifie que les variables d'état $(\underline{\epsilon}, \phi, S_l, T)$ suffisent à décrire complètement les états thermodynamiques que le matériau traversera au cours de son histoire. En conséquence, $d\Psi_{sq}$ s'avère être la différentielle exacte d'une fonction des variables indépendantes $(\epsilon_{ij}, \phi, S_l, T)$:

$$d\Psi_{sq} = \sigma_{ij}d\epsilon_{ij} + (S_g p_g + S_l p_l)d\phi - \phi p_c dS_l - S_{sq}dT \quad (38)$$

Les équations d'état de la poroélasticité dérivent alors d'un potentiel thermodynamique poroélastique $\Psi_s(\underline{\epsilon}, \phi, S_l, T)$ suivant les relations:

$$\underline{\sigma} = \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial \underline{\epsilon}} \right)_{\phi, S_l, T} \quad (39)$$

$$S_g p_g + S_l p_l = \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi} \right)_{\epsilon_{ij}, S_l, T} \quad (40)$$

$$\phi p_c = - \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial S_l} \right)_{\epsilon_{ij}, \phi, T} \quad (41)$$

$$S_{sq} = - \left(\frac{\partial \Psi_{sq}}{\partial T} \right)_{\epsilon_{ij}, \phi, S_l} \quad (42)$$

Ces équations d'état, qui ne concernent que le seul squelette, viennent alors compléter les équations d'état des fluides de la section 2.1 ainsi que les relations (28) qui assurent le complet remplissage de l'espace poreux.

5 Courbe de pression capillaire

5.1 Courbe de pression capillaire en transformation isotherme

Dans le cas indéformable et isotherme, $\epsilon_{ij} = 0$, $\phi = \phi_0$ et $T = T_0$, l'équation d'état (41) implique que la pression capillaire ne dépend que de la saturation en eau liquide:

$$p_c = p_c(S_l) \quad (43)$$

La courbe donnant la pression capillaire en fonction de la saturation en eau liquide est appelée "courbe de pression capillaire". Une telle courbe est représentée schématiquement à la figure 1. C'est généralement une courbe monotone décroissante du degré de saturation. La pression capillaire décroît d'une valeur maximum pouvant être infinie à une valeur minimum p_e dite de pression d'entrée d'air qui, lors d'un drainage est la pression capillaire au delà de laquelle la saturation en eau liquide diminue effectivement. Le tableau 1 rassemble quelques modèles paramétrés de courbe de saturation proposés dans la littérature.

Inversement, la courbe de pression capillaire étant expérimentalement connue, dans le cas indéformable et isotherme, l'équation d'état (41) conduit à identifier l'expression de l'énergie libre du squelette, où plutôt de sa variation que l'on continuera de noter Ψ_{sq} , par raison de simplicité, sous la forme:

$$\Psi_{sq} = \phi_0 U(S_l) \quad (44)$$

où

$$U(S_l) = \int_{S_l}^1 p_c(s) ds \quad (45)$$

L'équation (43) prend alors la forme:

$$p_c = -\frac{dU}{dS_l} \quad (46)$$

Dans le cas indéformable et isotherme l'énergie libre du squelette se réduit à celle des seules interfaces. L'énergie Ψ_{sq} s'identifie alors à la variation de l'énergie libre qu'emmagasinent ces interfaces, cette énergie étant rapportée à l'unité de volume de l'élément $d\Omega$. C'est le travail qu'il a fallu fournir aux interfaces pour amener l'échantillon de la saturation complète à la saturation actuelle. L'énergie U correspond à la même variation, mais cette fois rapportée à l'unité de volume de l'espace poreux $\phi_0 d\Omega$ dans lequel se localisent physiquement les interfaces. En se plaçant à l'échelle microscopique et en

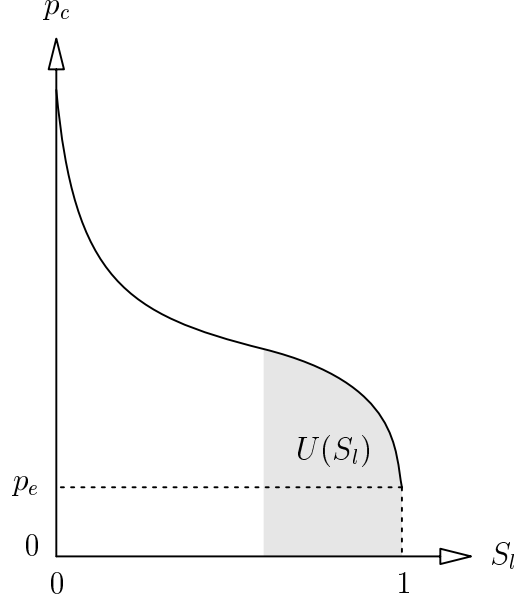


Figure 1: Courbe de pression capillaire et énergie des interfaces.

Auteurs	$S_l(p_c)$	Paramètres
Brooks & Corey	$(p_c/p_b)^{-\lambda}$	λ, p_b ($0.1 < \lambda < 10$)
van Genuchten	$(1 + (p_c/A)^n)^{-1+1/n}$	n, A ($1 < n < \infty$)
Brutsaert	$(1 + (p_c/A)^n)^{-1}$	n, A

Table 1: Modèles de courbes de saturation

conservant les notations de la section 3.2, on peut donc expliciter l'énergie $\phi_0 U$ sous la forme:

$$\phi_0 U = \gamma_{sl}\omega_{sl} + \gamma_{sg}\omega_{sg} + \gamma_{lg}\omega_{lg} - \gamma_{sl}\omega_s \quad (47)$$

où $\omega_s d\Omega$ est la surface du constituant solide compris dans le volume élémentaire $d\Omega$ et avec naturellement l'identité $\omega_s = \omega_{sl} + \omega_{sg}$.

5.2 Courbe de pression capillaire en transformation non isotherme

L'analyse de la section 5.1 peut facilement être reconduite dans le cas non isotherme. Dans le cas indéformable seul, $\epsilon_{ij} = 0$ et $\phi = \phi_0$, l'équation d'état (41) implique que la pression capillaire dépend aussi de la température:

$$p_c = p_c(S_l, T) \quad (48)$$

soit encore

$$S_l = S_l(p_c, T) \quad (49)$$

Inversement la fonction $p_c(S_l, T)$ étant supposée connue, l'intégration de l'équation d'état (41) permet d'identifier l'expression de l'énergie Ψ_{sq} sous la forme:

$$\Psi_{sq}(S_l, T) = \phi_0 U(S_l, T) + \psi_s(T) \quad (50)$$

où

$$U(S_l, T) = \int_{S_l}^1 p_c(s, T) ds \quad (51)$$

L'équation (48) prend alors la forme:

$$p_c = - \left(\frac{\partial U}{\partial S_l} \right)_T \quad (52)$$

L'équation d'état (42) entraîne alors:

$$S_{sq} = S_u + S_s \quad (53)$$

où

$$S_u = -\phi_0 \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{S_l} \quad (54)$$

$$S_s = -\frac{\partial \psi_s}{\partial T} \quad (55)$$

L'énergie $\phi_0 U(S_l, T)$ est ainsi toujours identifiable à l'expression (47), mais elle dépend maintenant aussi de la température à travers les tensions de surfaces $\gamma_{\alpha\beta}(T)$. L'énergie libre et l'entropie sont des quantités additives. L'énergie ψ_s est par conséquent l'énergie libre du constituant solide (augmentée de l'énergie de surface $\gamma_{sl}(T)\omega_s$) par unité du volume de l'élément macroscopique $d\Omega$ (et non pas du volume $(1 - \phi_0)d\Omega$ qu'il occupe physiquement). De même S_u est la variation d'entropie des interfaces par unité de volume $d\Omega$ et par rapport à l'état saturé. Conformément à (47), l'expression microscopique de S_u est donnée par

$$S_u = -\frac{d\gamma_{sl}}{dT}\omega_{sl} - \frac{d\gamma_{sg}}{dT}\omega_{sg} - \frac{d\gamma_{lg}}{dT}\omega_{lg} + \frac{d\gamma_{sl}}{dT}\omega_s \quad (56)$$

S_s est l'entropie du constituant solide (augmentée de l'entropie de surface $-\frac{d\gamma_{sl}}{dT}\omega_s$) par unité de volume $d\Omega$. Comme le constituant solide est ici indéformable mécaniquement et thermiquement, on peut écrire:

$$S_s = s_0 + C_s \ln \frac{T}{T_0} \quad (57)$$

$$\psi_s = \psi_0 - s_0(T - T_0) - C_s \left(T \ln \frac{T}{T_0} - (T - T_0) \right) \quad (58)$$

où C_s est la chaleur du constituant solide (augmentée de $-T \frac{d^2 \gamma_{sl}}{dT^2} \omega_s$) par unité de volume $d\Omega$.

5.3 Courbe de pression capillaire et isotherme de sorption

Dans le cas de matériaux suffisamment perméables comme les sables ou encore les roches [9], la courbe de pression capillaire peut être déterminée expérimentalement par invasion capillaire, en contrôlant la pression capillaire. Pour des matériaux peu perméables, comme les argiles et les bétons, cette méthode trouve très rapidement ses limites à mesure que la saturation décroît, la pression capillaire à exercer devenant trop élevée. En pratique, au dessous d'une saturation de l'ordre de 90%, elle ne peut souvent être déterminée qu'indirectement, à l'aide de l'isotherme de sorption.

Dans une expérience de sorption l'échantillon est mis en équilibre thermodynamique avec une ambiance à température constante dont on sait contrôler la pression de vapeur ou, plus exactement, l'humidité relative h_r :

$$h_r = \frac{p_v}{p_{vs}} \quad (59)$$

L'humidité relative est imposée par l'intermédiaire de solutions salines saturées. On peut la faire varier en modifiant les solutions et, par là, l'équilibre thermodynamique entre l'eau liquide, solvant de la solution, et la vapeur d'eau de l'air ambiant. Entre deux paliers successifs d'humidité relative la variation de porosité au liquide ϕ_l peut être mesurée par simple pesée (si la masse volumique du liquide est supposée constante). Par ailleurs la mesure de la déformation volumique, ϵ_{ii} , donne accès à la porosité. Ainsi le degré de saturation S_l peut être calculé. On en déduit l'isotherme dite de sorption:

$$h_r = h_r(S_l) \quad (60)$$

Le mélange gazeux de l'échantillon est par ailleurs maintenu en équilibre avec l'air ambiant, à pression atmosphérique p_{atm} , si bien que pour l'échantillon la différence de pression $p_l - p_{atm}$ s'identifie à l'opposé de la pression capillaire $-p_c$. La loi d'équilibre thermodynamique entre l'eau liquide et sa vapeur (11) se précise alors en:

$$-p_c = \rho_l \frac{RT}{M_v} \ln h_r \quad (61)$$

L'équation précédente et l'équilibre qu'elle traduit permettent d'associer à une valeur de l'humidité relative h_r une valeur de la pression capillaire p_c . La

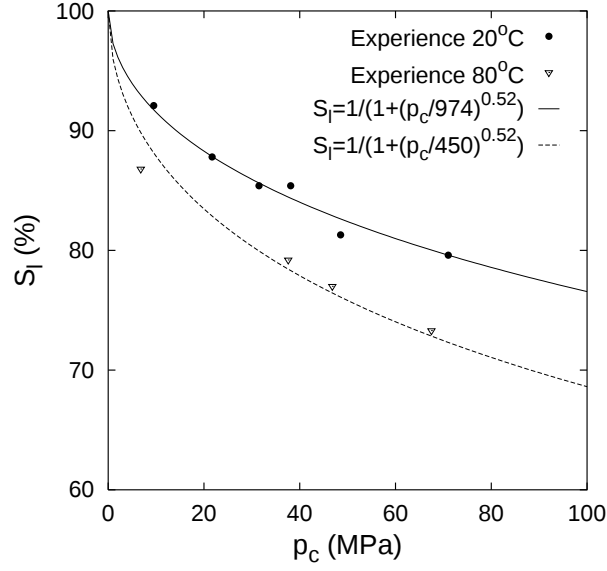


Figure 2: Courbe de pression capillaire déduite de l'isotherme de sorption.

méthode conduit en fin de compte à la détermination indirecte de la courbe $p_c = p_c(S_l)$ et, en faisant varier la température, de la courbe $p_c = p_c(S_l, T)$.

La figure 2 fournit un exemple pour deux températures différentes, $T = 20^\circ C$, $T = 80^\circ C$, d'une courbe de pression capillaire résultant d'un tel processus de mesure dans le cas d'une argile artificielle (l'argile FoCa destinée à être employée comme matériau constitutif des barrières ouvragées pour le stockage des déchets radioactifs) [19].

Comme on le constate très souvent pour les argiles, on notera sur la figure 2 que la pression du liquide p_l devient négative en dessous d'une valeur encore proche de la saturation complète, puisque la pression du gaz, qui est maintenue à la pression atmosphérique, est de l'ordre $0,1 MPa$. Seule l'humidité relative étant en fin de compte réellement mesurée, la pression du liquide calculée à l'aide de (61) est une pression d'eau liquide thermodynamiquement équivalente au sens de l'équilibre entre la vapeur d'eau et l'eau interstitielle de l'argile. Elle tient compte des interactions entre l'eau liquide et le squelette solide.

5.4 Hystérésis

5.4.1 Approche énergétique de l’hystérésis

Dans le cas d’évolutions réversibles la courbe de pression capillaire qui relie pression capillaire p_c et saturation en eau liquide S_l est biunivoque. Pour la majorité des sols et des roches il est bien connu que cette biunivocité n’est pas satisfaite: lorsque un élément de matériau est soumis à un cycle de drainage-imbibition, correspondant à un cycle de pression capillaire (*i.e.* $\oint dp_c = 0$), un phénomène d’hystérésis se manifeste. Ce phénomène est largement décrit dans la littérature [24], [26], [9]. Le développement succinct ci-après vise à replacer ce phénomène dans le contexte énergétique précédent.

Commençons par donner une description très schématique de ce phénomène. Partant d’un état sec du matériau, c’est-à-dire d’une valeur très petite de S_l et d’une valeur très grande de p_c , lorsqu’on diminue la pression capillaire, le point représentatif (S_l, p_c) de l’évolution du système dans le plan $[S_l, p_c]$ suit une courbe dite d’imbibition, définie par:

$$p_c = s_I(S_l) \quad (62)$$

À l’issue de l’imbibition totale du matériau, c’est-à-dire pour $S_l = 100\%$, si l’on réaugmente la pression capillaire, on suit alors dans le plan $[S_l, p_c]$ une courbe de drainage définie par:

$$p_c = s_D(S_l) \quad (63)$$

Cette dernière est différente de la courbe d’imbibition. Pour une même pression capillaire la saturation est plus faible à l’imbibition qu’au drainage. Ces deux courbes forment une boucle d’hystérésis reproductible. Lorsqu’à partir d’un point quelconque de l’une de ces deux courbes on inverse le sens de variation de la pression capillaire, le point représentatif (S_l, p_c) rejoint alors l’autre courbe en suivant une courbe assimilable, dans une première approche, à une droite verticale définie par $S_l = \text{cste}$ ⁵. L’ensemble de ces comportements est reproduit à la figure 3.

⁵Cette description est schématique. Elle ne vise qu’à décrire, dans les grandes lignes, le comportement réel des matériaux qui, comme en témoignent les ouvrages spécialisés sur le sujet [23], est beaucoup plus complexe. Il est bien connu, par exemple, que la courbe de drainage initiale, c’est-à-dire celle qui s’obtient au premier cycle à partir d’un état totalement saturé, puisse être légèrement distincte des courbes de drainage, dites secondaires, obtenues lors des cycles suivants. On laissera de côté ce phénomène. On ne parlera pas, non plus, de saturation dite résiduelle souvent introduite dans les ouvrages et dont la pertinence physique ne semble pas encore totalement établie [25]. La boucle d’hystérésis imbibition-drainage est aussi qualifiée quelquefois de principale dans la mesure

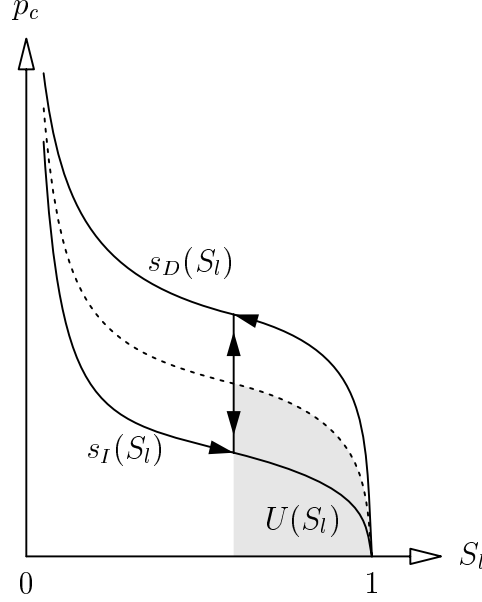


Figure 3: Les courbes de drainage et d'imbibition (en trait continu). La courbe $-\frac{\partial U}{\partial S_l}$ (en trait pointillé) est nécessairement située à l'intérieur de la boucle d'hystérésis. L'aire balayée par cette courbe (en grisé) représente la variation d'énergie des interfaces par unité de volume poreux, $U(S_l)$.

Ce schéma de comportement idéalisé permet de tirer quelques conclusions sur l'énergie des interfaces. En conservant toujours une forme d'énergie libre donnée par (44), c'est-à-dire $\Psi_{sq} = \phi_0 U(S_l)$, la positivité de l'énergie dissipée (32) s'écrit :

$$-\phi_0(p_c + \frac{\partial U}{\partial S_l})dS_l \geq 0 \quad (64)$$

Dans le cas réversible l'énergie dissipée est bien nulle: le travail fourni $-\phi_0 p_c dS_l$ est égal à la variation d'énergie libre $\phi_0 dU$ des interfaces. En présence d'hystérésis capillaire, (46) ne saurait être valable à la fois pour l'imbibition et le drainage. L'identification expérimentale $U(S_l) = \int_{S_l}^1 p_c(s)ds$ de l'énergie $U(S_l)$ n'est alors plus possible, du moins sans information complémentaire. L'inégalité (64) nous renseigne, toutefois, sur la valeur de la force thermodynamique $-\frac{\partial U}{\partial S_l}$ associée à S_l . En effet (64) impose

$$s_I \leq -\frac{\partial U}{\partial S_l} \leq s_D \quad (65)$$

où les matériaux réels exhibent dans le plan $[S_l, p_c]$ des boucles d'hystérésis intermédiaires (*i.e.*, avec $\oint dp_c = 0$). On observe alors que ces boucles viennent s'appuyer sur la courbe d'imbibition et la courbe de drainage, en passant d'une courbe à l'autre par des ajustements complexes de la pression capillaire qu'on ne représentera pas ici.

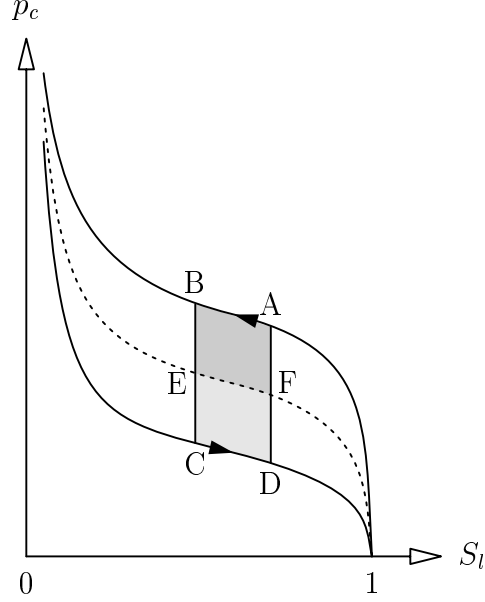


Figure 4: Lors du drainage (chemin AB), l'énergie dissipée est égale à l'aire balayée (ABEF). Lors de l'imbibition (chemin CD), c'est l'aire (CDFE) qui est dissipée.

Autrement dit le point représentatif $(S_l, -\frac{\partial U}{\partial S_l})$ dans le plan $[S_l, p_c]$ décrit une courbe comprise entre les courbes d'imbibition et de drainage. L'aire sous cette courbe représente l'énergie $U(S_l)$ (figure 3). L'énergie dissipée lors du drainage (chemin AB sur la figure 4) est, par conséquent, égale à l'aire comprise entre la courbe de drainage et la courbe $-\frac{\partial U}{\partial S_l}(S_l)$. La même analyse pour l'imbibition (chemin CD sur la figure 4) conduit à identifier l'énergie dissipée à l'aire comprise entre la courbe d'imbibition et la courbe $-\frac{\partial U}{\partial S_l}(S_l)$. Lors d'un cycle (chemin ABCD) l'énergie dissipée est ainsi égale à l'aire comprise entre la courbe de drainage et la courbe d'imbibition.

5.4.2 Identification de l'énergie $U(S_l)$ par une analyse à l'échelle microscopique pour une géométrie particulière de l'espace poreux et dans l'hypothèse d'un angle de contact nul

Une interprétation classique [23] de l'hystérésis consiste à analyser à l'échelle microscopique l'imbibition et le drainage en termes respectivement de remplissage et de vidange de pores de rayons différents, reliés par de fins capillaires d'accès. Le volume de ces capillaires d'accès est négligeable en terme de saturation, mais leur présence est déterminante dans l'analyse. Supposons, comme dans [14], que l'espace poreux puisse être décrit par un ensemble de

pores sphériques répartis en N classes caractérisées par un rayon de pore R_β ($\beta \in \{1, \dots, N\}$). Supposons de plus que les pores soient ordonnés en rayon décroissant ($R_1 > R_2 > \dots$) et que le réseau poreux soit constitué d'une succession de pores de rayons décroissants reliés entre eux par des fins capillaires de rayon r_β ($\beta \in \{1, \dots, N\}$) également décroissant (figure 5). Enfin supposons que le liquide mouille parfaitement le solide (angle de contact nul). Ainsi, avec cette dernière hypothèse, les pores appartenant à une classe donnée sont soit entièrement remplis de liquide soit entièrement remplis de gaz, le ménisque capillaire étant toujours localisé dans un capillaire d'accès aux pores.

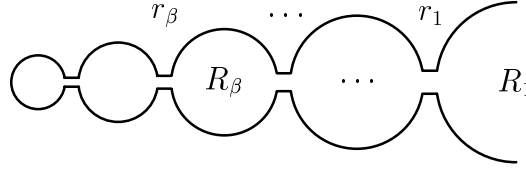


Figure 5: Morphologie du réseau poreux.

Introduisons alors n , $1 < n < N$, tel que tous les pores de la classe $\beta > n$ soient remplis de liquide et tous les pores de la classe $\beta \leq n$ soient remplis de gaz.

Lors de l'imbibition la pression capillaire exercée, $p_c = s_I(S_l)$, varie en fonction du rayon R_n de la classe des pores à remplir, suivant la loi de Laplace d'équilibre des interfaces:

$$s_I(S_l) = \frac{2\gamma_{lg}}{R_n} \quad (66)$$

Lors d'une imbibition infinitésimale, correspondant au trajet (CD) de la figure 4, on passe ainsi de l'état (a) à l'état (b) représentés à la figure 6.

Si maintenant on réaugmente la pression capillaire il n'y aura tout d'abord pas de variation notable de la saturation. Cela correspond au trajet (DA) de la figure 4 et au passage de l'état (b) de la figure 6 à l'état (β) de la figure 7. Il ne peut en effet y avoir vidange du pore de rayon R_n tant que la pression capillaire n'a pas atteint la valeur $p_c = s_D(S_l)$ ajustée au rayon, r_n , de son capillaire cylindrique d'accès, soit:

$$s_D(S_l) = \frac{2\gamma_{lg}}{r_n} \quad (67)$$

Lorsque la relation (67) est vérifiée la vidange du pore de rayon R_n intervient. Cela correspond au trajet (AB) de la figure 4 et l'on passe de l'état (β) à l'état (α) de la figure 7.

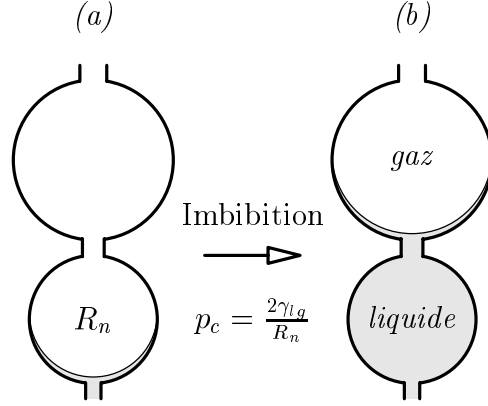


Figure 6: Le remplissage (imbibition) du pore de rayon R_n s'effectue à la pression capillaire $s_I = 2\gamma_{lg}/R_n$ ajustée à son rayon.

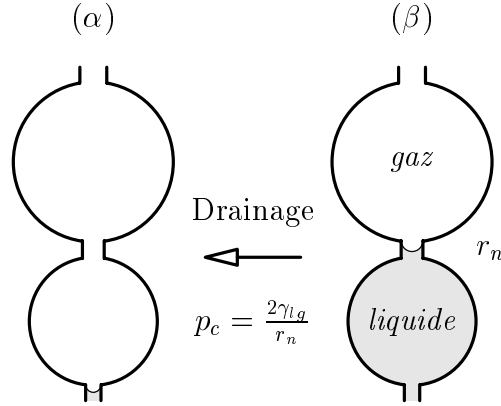


Figure 7: La vidange (drainage) du pore de rayon R_n s'effectue à la pression capillaire $s_D = 2\gamma_{lg}/r_n$ ajustée au rayon r_n de son capillaire d'accès.

Comme le rayon, la surface et le volume des capillaires d'accès sont supposés négligeables devant ceux des pores, l'énergie libre du ménisque capillaire ainsi, d'ailleurs, que celles des interfaces associées à la surface des capillaires, sont négligeables devant l'énergie libre des interfaces des pores. Par conséquent, notant ω_β l'aire des pores appartenant à la classe β , la variation d'énergie libre $\phi_0 U(S_l)$ est donnée, conformément à (47), par

$$\phi_0 U(S_l) = \sum_{\beta=1}^n (\gamma_{sg} - \gamma_{sl}) \omega_\beta \quad (68)$$

Soit ϕ_β la fraction volumique associée à la classe β . On remarque alors que, pour la géométrie sphérique des pores, $\omega_\beta = 3 \frac{\phi_\beta}{R_\beta}$. D'autre part la nullité de

l'angle de contact impose que $\gamma_{sg} - \gamma_{sl} = \gamma_{lg}$. En conséquence l'équation (68) prend la forme

$$\phi_0 U(S_l) = \sum_{\beta=1}^n \frac{3\gamma_{lg}}{R_\beta} \phi_\beta \quad (69)$$

Les variations de cette expression lors du remplissage ou de la vidange du pore de rayon R_n , sont définies par celles de n . On relie alors la fraction volumique des pores de rayon R_n à la variation du degré de saturation suivant l'expression $\phi_0 dS_l = -\phi_n$. La variation de $\phi_0 U$ prend alors la forme

$$\phi_0 dU = -\frac{3\gamma_{lg}}{R_n} \phi_0 dS_l \quad (70)$$

De cette expression et de (66) on tire l'expression recherchée de $-\frac{\partial U}{\partial S_l}$ et $U(S_l)$:

$$-\frac{\partial U}{\partial S_l} = \frac{3}{2} s_I(S_l) \quad (71)$$

$$U(S_l) = \frac{3}{2} \int_{S_l}^1 s_I(s) ds \quad (72)$$

Ainsi, pour la géométrie particulière du réseau poreux considéré ici et dans l'hypothèse d'un angle de contact nul, la courbe $-\frac{\partial U}{\partial S_l}(S_l)$, caractérisant la variation d'énergie libre des interfaces, se situe au dessus de la courbe d'imbibition avec un rapport constant entre ces deux courbes égal à $\frac{3}{2}$.

L'expression de l'énergie dissipée (64), c'est-à-dire

$$-\phi_0(p_c + \frac{\partial U}{\partial S_l})dS_l \geq 0 \quad (73)$$

prend ainsi, lors de l'imbibition ou du drainage, les formes:

$$\frac{1}{2} \phi_0 s_I dS_l \geq 0 \quad (\text{imbibition : } dS_l > 0, p_c = s_I(S_l)) \quad (74)$$

$$-\phi_0(s_D - \frac{3}{2}s_I)dS_l \geq 0 \quad (\text{drainage : } dS_l < 0, p_c = s_D(S_l)) \quad (75)$$

L'énergie dissipée par unité de volume de l'espace poreux $\phi_0 d\Omega$ dans un cycle d'hystérésis infinitésimal d'amplitude dS_l vaut ainsi $(s_D - s_I)dS_l$. Cette énergie s'identifie à l'aire hachurée ABCD de la figure 4. On remarquera que l'inégalité (75) entraîne la restriction thermodynamique $s_D > \frac{3}{2}s_I$, restriction manifestement liée à la géométrie sphérique adoptée pour les pores et nécessairement satisfaite dans l'interprétation précédente puisque $s_D/s_I = R_n/r_n \gg 1, \forall n$.

6 Poroélasticité et courbe de pression capillaire

6.1 Hypothèse de séparation des énergies et loi de comportement thermoporoélastique

Les équations d'état de la poroélasticité dans le cas non saturé ont été précisées sous la forme générale des équations (39), (40), (41) et (42). L'exploitation des données expérimentales, en particulier celle de la courbe de pression capillaire, nécessite une hypothèse supplémentaire. Une première hypothèse consiste à supposer, comme cela a pu être montré dans le cas indéformable et en l'absence d'hystérésis, que la pression capillaire dépend uniquement de la saturation en eau liquide et de la température. Dans ce cas l'intégration de l'équation d'état (41) conduit alors à identifier la variation d'énergie libre sous la forme:

$$\Psi_{sq}(\epsilon_{ij}, \phi, S_l, T) = \phi U(S_l, T) + \psi_s(\epsilon_{ij}, \phi, T) \quad (76)$$

Supposer dans le cas déformable que la pression capillaire ne dépend que de la saturation en eau liquide et de la température revient donc à supposer que l'énergie libre du constituant solide (ou squelette *solide* en n'y incluant pas les interfaces) peut s'exprimer à l'échelle macroscopique séparément de l'énergie libre des interfaces à l'aide des déformations et de la porosité seules (en plus de la température). L'énergie $U(S_l, T)$ reste en effet identifiée à la variation de l'énergie libre des interfaces par unité de volume de l'espace poreux $\phi d\Omega$, tandis que $\psi_s(\epsilon_{ij}, \phi, T)$ représente l'énergie libre du constituant solide, maintenant déformable (toujours augmentée de l'énergie de surface $\gamma_{sl}(T)\omega_s$ à cause de la référence choisie pour U). Les relations (52) à (54) sont ainsi conservées en y remplaçant le cas échéant ϕ_0 par ϕ .

Considérons maintenant une autre hypothèse moins restrictive. Au lieu de partir de l'hypothèse d'une courbe de pression capillaire ne dépendant que de la saturation en eau liquide et de la température, envisageons d'emblée l'hypothèse de séparation des énergies. On exprime alors l'énergie libre du constituant solide, à l'échelle macroscopique, séparément de l'énergie des interfaces à l'aide des déformations, de la porosité et de la température. Cette hypothèse est moins restrictive que la première puisqu'elle consiste donc à proposer pour l'énergie libre la forme plus générale suivante

$$\Psi_{sq}(\epsilon_{ij}, \phi, S_l, T) = \phi U(\phi, S_l, T) + \psi_s(\epsilon_{ij}, \phi, T) \quad (77)$$

où ϕU représente donc toujours l'énergie des interfaces maintenant dépendant

de la porosité en plus du degré de saturation en liquide et de la température⁶.

Avec la forme générale (77), les équations d'état (39), (40), (41) et (42) se décomposent alors en deux systèmes d'équations. Le premier exprime le comportement des interfaces au sein du volume poreux et généralisent les équations (52) et (54) sous les formes:

$$p_c = - \left(\frac{\partial U}{\partial S_l} \right)_{\phi, T} \quad (78)$$

$$S_u = - \phi \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{\phi, S_l} \quad (79)$$

Si la courbe de pression capillaire est déterminée expérimentalement sous la forme:

$$p_c = p_c(\phi, S_l, T) \quad (80)$$

alors l'intégration de (78) permet d'identifier l'expression de l'énergie $U(\phi, S_l, T)$ sous la forme:

$$U(\phi, S_l, T) = \int_{S_l}^1 p_c(\phi, s, T) ds \quad (81)$$

Le deuxième système d'équations exprime le comportement du constituant solide et s'écrit:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial \psi_s}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_{\phi, T} \quad (82)$$

$$\pi = \left(\frac{\partial \psi_s}{\partial \phi} \right)_{\epsilon_{ij}, T} \quad (83)$$

$$S_s = - \left(\frac{\partial \psi_s}{\partial T} \right)_{\epsilon_{ij}, \phi} \quad (84)$$

où π est défini par

$$\pi = (S_g p_g + S_l p_l) - \left(\frac{\partial(\phi U)}{\partial \phi} \right)_{S_l, T} \quad (85)$$

⁶Une hypothèse encore plus générale aurait été de considérer une énergie U dépendant aussi des déformations sous la forme $U(\epsilon_{ij}, \phi, S_l, T)$. Cette forme n'est pas dénuée d'intérêt mais elle conduit bien évidemment à des développements plus complexes. Néanmoins on peut remarquer qu'il est physiquement naturel de faire dépendre l'énergie des interfaces non pas des déformations du squelette mais de la déformation du volume poreux dans lequel ces interfaces se localisent. La description de cette déformation du volume poreux est ici modélisée par la porosité ϕ . Elle est cependant suffisamment riche comme les développements le montrerons. C'est pourquoi nous n'envisageons ici qu'une énergie $U(\phi, S_l, T)$.

Dans la suite on pourra envisager différentes formes particulières pour l'énergie $U(\phi, S_l, T)$ dont, par exemple, la forme $U(S_l, T)$ envisagée précédemment. On conservera cependant la même notation pour la fonction U , le contexte levant toute ambiguïté.

6.2 La pression interstitielle équivalente

Dans le cas d'un matériau poreux saturé par le liquide à la pression p_l , la théorie de la poroélasticité de Biot, confirmée par de nombreuses expériences, montre que le comportement est défini par des relations entre les couples (σ_{ij}, p_l) et (ϵ_{ij}, ϕ) , s'écrivant dans le cadre d'une formulation mettant en jeu l'énergie élastique $\psi(\epsilon_{ij}, \phi, T)$, sous la forme:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_{\phi, T} \quad (86)$$

$$p_l = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right)_{\epsilon_{ij}, T} \quad (87)$$

Ce résultat peut être facilement retrouvé par la démarche exposée à la section précédente sous réserve de l'identification $\psi = \psi_s$. Le cas saturé consiste à imposer, dans (83) et (85), $S_l = 1$, $S_g = 0$ et $U(\epsilon_{ij}, 1, T) = 0$ (par définition de U , équation (81)). La variable π est alors égale à p_l et les lois de comportement du matériau saturé (86) et (87) sont alors retrouvées. L'énergie ψ figurant dans ces équations de la poroélasticité a donc nécessairement la même expression que l'énergie ψ_s définie dans 76 ou 77 puisque toutes deux correspondent à l'énergie élastique du squelette solide.

Il s'en suit que, par référence au cas saturé, la pression π apparaît alors, dans l'équation (82), comme une pression interstitielle équivalente de liquide au sens où le comportement du squelette serait le même si celui-ci était saturé par le liquide à la pression interstitielle π . Cela signifie que les interactions mécaniques que subit le squelette de la part des fluides et des interfaces se ramènent à une pression uniforme π s'exerçant sur la paroi du solide. Elle vaut $\pi = p_l$ lorsque $S_l = 1$ (cas saturé) et $\pi = p_g - \frac{\partial(\phi U(\phi, 0, T))}{\partial \phi}$ lorsque $S_l = 0$ (cas sec)⁷.

⁷Dans ce dernier cas la pression π n'est pas égale à p_g car l'état de référence choisi est l'état saturé. Ainsi, lorsque le degré de saturation du matériau varie de 1 à 0 la tension de surface, à la surface du solide, a varié de $(\gamma_{sg} - \gamma_{lg})$. La variation d'énergie des interfaces est donc, d'après (47), égale à $\phi U(\phi, 0, T) = (\gamma_{sg} - \gamma_{lg})\omega_s$ (ω_s surface solide actuelle par unité de volume $d\Omega$). C'est cet effet qui est pris en compte dans le terme $\frac{\partial(\phi U(\phi, 0, T))}{\partial \phi} = (\gamma_{sg} - \gamma_{lg})\frac{\partial \omega_s}{\partial \phi}$. Par exemple pour un matériau modèle formé d'un

6.3 Pression interstitielle équivalente et contrainte effective

Regardons ce qui se passe maintenant dans le cas des sols granulaires où l'hypothèse de variations de volume négligeables pour le constituant solide est satisfaite c'est-à-dire où

$$\phi - \phi_0 = \epsilon_{ii} \quad (88)$$

Dans ce cas l'énergie élastique du solide est alors une fonction du tenseur des déformations et de la température uniquement, soit $\psi_s(\epsilon_{ij}, \phi, T) = w_s(\epsilon_{ij}, T)$. Lorsque le sol est saturé il est expérimentalement bien connu que le tenseur des déformations du sol est entièrement gouverné par le tenseur des contraintes effectives $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p_l \delta_{ij}$. De fait les équations 86 et 87 montrent que

$$\sigma'_{ij} = \frac{\partial w_s}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (89)$$

Lorsque le sol est maintenant non saturé les équations 82 et 83 s'écrivent alors

$$\sigma_{ij} + \pi \delta_{ij} = \frac{\partial w_s}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (90)$$

L'hypothèse de découplage des énergies sous la forme (76), entre celle du squelette *solide* et celle des interfaces entre les différents constituants, permet ainsi de généraliser au cas non saturé le concept de tenseur des contraintes effectives en prenant pour nouvelle définition

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \pi \delta_{ij} \quad (91)$$

D'après (90), il reste le tenseur des contraintes unique gouvernant le tenseur des déformations du squelette solide. Avec la définition étendue (91), la relation (89) est en effet reconduite dans le cas non saturé ($S_l < 1$). La définition (85) assure de fait la continuité avec le cas saturé puisqu'en y faisant $S_l = 1$, on retrouve $\pi = p_l$ ⁸.

empilement de billes (en contact) de rayon R centrées sur un réseau cubique, on obtient $U(\phi, 0, T) = \frac{3\pi}{6-\pi} \frac{\gamma_{sg} - \gamma_{sl}}{R}$.

⁸Dans le cas d'un matériau poreux saturé et d'un constituant solide compressible, de module de compressibilité homogène K_s , on sait (cf. par expl. [16]) que le tenseur des contraintes effectives a pour expression $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + bp\delta_{ij}$, où $b = 1 - K_0/K_s$ est le coefficient dit de Biot, K_0 étant le module de compressibilité drainé du matériau poreux à pression interstitielle p nulle. Il est alors aisé de montrer que le tenseur des contraintes effectives généralisées, sous les mêmes hypothèses d'élasticité linéaire et en suivant la même démarche, aura pour expression $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + b\pi\delta_{ij}$ dans le cas non saturé.

Dans de nombreux travaux [8], [30], [28], la pression interstitielle équivalente π est souvent identifiée à la pression $S_g p_g + S_l p_l$. Nous la noterons $\pi^{(\text{Bishop})}$ pour la différencier de π , soit

$$\pi^{(\text{Bishop})} = S_g p_g + S_l p_l \quad (92)$$

On parle alors de tenseur des contraintes effectives de Bishop [8] définies par:

$$\sigma'_{ij}{}^{(\text{Bishop})} = \sigma_{ij} + (S_g p_g + S_l p_l) \delta_{ij} \quad (93)$$

La relation (85) montre que la définition (93) néglige les effets de tensions superficielles et l'énergie $U(\phi, S_l, T)$ qui leur est associée. De fait les travaux conduisant à l'identification (93), lorsqu'ils évaluent les contraintes macroscopiques à partir des moyennes de leurs homologues microscopiques, ne retiennent dans cette évaluation que les contraintes associées à la matrice solide et aux pressions des fluides. Ils négligent implicitement les termes qui proviennent des tensions superficielles, termes qui doivent pourtant être pris en compte dans cette évaluation "micro-macro" [12].

6.4 Pression interstitielle équivalente π et données expérimentales

Particularisons ici l'expression de l'énergie libre Ψ_s à la forme (76) en choisissant, par conséquent, une énergie U , et une courbe de pression capillaire, ne dépendant pas de ϕ , *i.e.* $U(S_l, T)$. La pression π est alors donné par (cf. eq. 85)

$$\pi = S_g p_g + S_l p_l - U(S_l, T) \quad (94)$$

L'expression incrémentale $d\pi$ issue de (94) et donnée par ($dU = -p_c dS_l$)

$$d\pi = S_g dp_g + S_l dp_l \quad (95)$$

a été proposée initialement dans [27] et peut être comparée à l'expression 92 de $\pi^{(\text{Bishop})}$. La similarité apparente entre les définitions 92 et 95 est sans doute encore aujourd'hui à l'origine d'une confusion qui cache l'importance du rôle joué par les interfaces dans la définition 95 de la pression interstitielle équivalente. Ainsi adopter la définition (92) de la pression interstitielle équivalente revient à négliger la pression représentée par l'aire grisée de la figure 1. Par exemple, avec les données expérimentales relatives à l'argile FoCa de la figure 2, l'erreur commise en adoptant l'expression (92) s'évalue à une traction d'environ $14,5 \text{ MPa}$, pour une température de 20°C , une saturation de 70% et une pression capillaire correspondante de 100 MPa . L'erreur dépasse alors les 20% puisque la valeur $14,5 \text{ MPa}$ est à comparer à la valeur -70 MPa de $S_g p_g + S_l p_l$ (obtenue en négligeant la pression gazeuse p_g).

Par opposition aux équations générales de comportement (41) ou même (78), le tenseur des contraintes effectives défini par (91) reste fondé sur l'hypothèse qu'une relation du type $p_c = p_c(S_l, T)$ est conservée dans le cas déformable. Elle nécessite donc une confirmation expérimentale discriminante. De fait des expériences effectuées à saturation complète (*i.e.*, $S_l = 1$, $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p_l \delta_{ij}$ avec $\pi = p_l$) et des expériences effectuées sur un échantillon non saturé de gonflement libre (*i.e.*, $S_l < 1$, $\sigma_{ij} = 0$, $\sigma'_{ij} = \pi \delta_{ij}$ avec l'expression de π donnée par l'équation (85)) doivent conduire à la même identification de la relation de comportement liant σ'_{ij} et ϵ_{ij} (cf. (90)).

Des expériences de cette nature ont pu être menées sur l'argile artificielle FoCa mentionnée au paragraphe 5.3. Elles ont été rapportées dans [19].

Il peut y avoir intérêt à distinguer les variations d'énergie élastique associées à la déformation volumique et aux déformations déviatoriques. À cet effet introduisons la contrainte hydrostatique moyenne σ et les composantes s_{ij} du déviateur des contraintes définies par:

$$\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{kk} \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (96)$$

Soit également ϵ et e_{ij} , la déformation volumique et les composantes du déviateur des déformations définies par:

$$\epsilon = \epsilon_{kk} \quad e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (97)$$

Les équations (90) se décomposent alors de la façon suivante:

$$\sigma + \pi = \left(\frac{\partial w_s}{\partial \epsilon} \right)_{e_{ij}} \quad (98)$$

$$s_{ij} = \left(\frac{\partial w_s}{\partial e_{ij}} \right)_{\epsilon} \quad (99)$$

Dans le dépouillement des essais il est d'usage de préférer l'indice des vides e à la variation volumique ϵ_{kk} . Cet indice est défini comme le rapport du volume des vides au volume du constituant solide. La mesure de e présente l'intérêt de ne plus avoir besoin de définir un état de référence sous l'hypothèse d'un constituant solide dont les variations de volume sont négligeables. Dans cette hypothèse naturelle pour les sols, notant e_0 l'indice des vides initial, on a la relation:

$$\epsilon_{kk} = \frac{e - e_0}{1 + e_0} \quad (100)$$

Argumentant alors w_s avec les variables e et e_{ij} plutôt qu'avec ϵ et e_{ij} , on obtient alternativement à (98) et (99)

$$\sigma + \pi = (1 + e_0) \left(\frac{\partial w_s}{\partial e} \right)_{e_{ij}} \quad (101)$$

$$s_{ij} = \left(\frac{\partial w_s}{\partial e_{ij}} \right)_e \quad (102)$$

Des expériences effectuées en conditions saturées sur les argiles et en particulier l'argile FoCa, montrent que le comportement déviatorique (102) s'approche d'un comportement élastique isotrope linéaire et, par conséquent, découplé du comportement volumique défini par (101). Ce dernier, en revanche, présente un caractère non linéaire que permet d'identifier l'expérience de compression isotrope. Concernant l'argile FoCa, l'expérience de compression isotrope à saturation unitaire constante a donné les résultats de la figure 8 où l'indice des vides e est reporté en fonction du logarithme de la contrainte effective moyenne $\sigma' = \sigma + p_l$. La partie BC de la courbe de chargement correspond à une phase réversible élastique non linéaire, objet de l'approche ici développée. On peut en rendre compte avec précision par la relation différentielle classique:

$$de = -\kappa \frac{d\sigma'}{\sigma'} \quad (\sigma' = \sigma + p_l \text{ et } S_l = 1) \quad (103)$$

Le coefficient κ est évalué à $\kappa = 0.1$.

L'expérience de sorption isotherme rapportée au paragraphe 5.3 correspond à un échantillon qui se sature progressivement (par sorption) sous contrainte nulle $\sigma_{ij} = 0$. La pression π et, par là, la contrainte effective $\sigma'_{ij} = \pi \delta_{ij}$ peuvent être évaluées en fonction de la pression capillaire p_c à l'aide de la relation (85) et de la courbe de pression capillaire de la figure 2, déduite de l'isotherme de sorption. Dans cette expérience la pression capillaire est relâchée progressivement et l'échantillon gonfle. L'indice des vides e peut être mesuré et reporté à nouveau en fonction du logarithme de la contrainte effective moyenne, cette fois-ci égale à $\sigma' = \pi$. La figure 9 rend compte des résultats correspondant à l'argile FoCa. La courbe obtenue peut être à nouveau approchée avec précision par la relation différentielle:

$$de = -\kappa' \frac{d\sigma'}{\sigma'} \quad (\sigma' = \pi \text{ et } S_l < 1) \quad (104)$$

Les deux expériences, de natures très différentes, sont indépendantes. On constate pourtant un très bon accord entre les deux fonctions $e(\sigma')$ identifiées

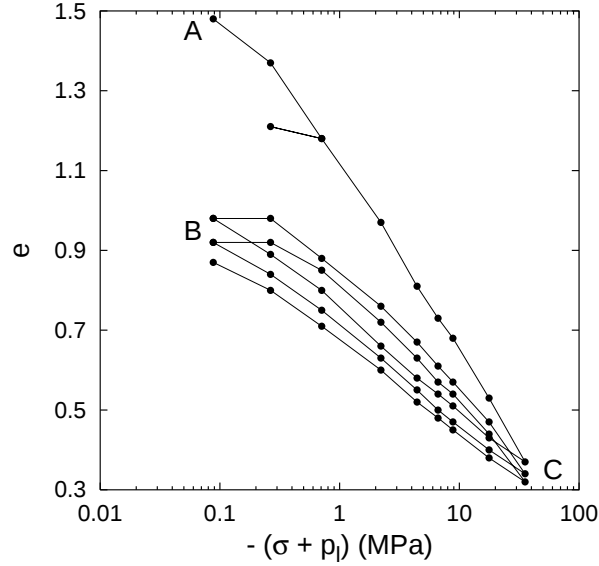


Figure 8: Indice des vides en fonction du logarithme de la contrainte effective moyenne dans une expérience de compression isotrope sur un échantillon saturé.

intervenant dans la relation (101) puisque l'évaluation de 0.1 pour κ' est la même que celle de κ . Cet accord persiste pour les deux températures des expériences réalisées, $T = 20^\circ C$ et $T = 80^\circ C$. Cela confirme la pertinence de la notion de pression interstitielle équivalente π et de la contrainte effective $\sigma' = \sigma + \pi$ qui lui est attachée, pour rendre compte de la phase élastique du comportement de l'argile ici étudiée. Des expériences indépendantes [11], [17], réalisées sur des bétons de natures très différentes (béton cellulaire et béton ordinaire), ont conduit à des conclusions analogues à celles rapportés ici.

7 Approche énergétique, approche "micro-macro" et hystérésis

7.1 Pression interstitielle π et approches "micro-macro"

L'approche énergétique de la poroélasticité a été développée jusqu'ici à l'échelle macroscopique sans tenir compte d'informations microscopiques telles que la géométrie des domaines occupés par les constituants solide et fluides ou la connaissance des lois de comportement de ces constituants à l'échelle micro-

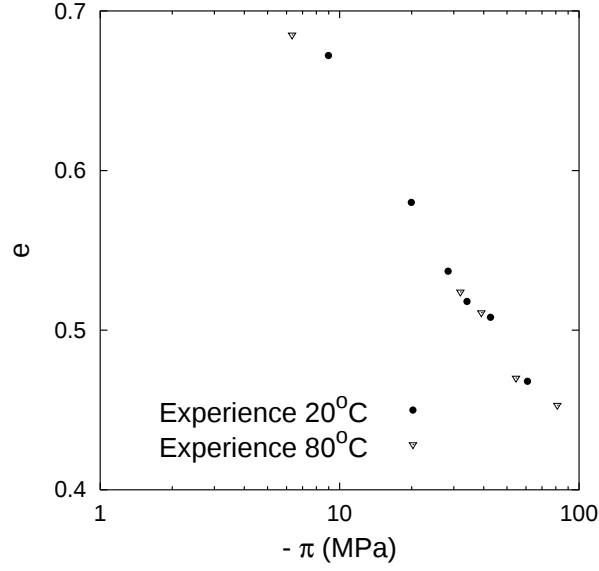


Figure 9: Indice des vides reporté en fonction de $\log(-\pi)$ dans une expérience de gonflement libre d'un échantillon en cours de saturation.

scopique. L'existence d'un potentiel macroscopique Ψ_{sq} , tel que défini par (22,23) et conduisant aux relations d'état (39), peut de fait être prouvée par des méthodes d'homogénéisation [13], [21]. Ces méthodes permettent, de plus, de préciser la forme des lois macroscopiques à partir des connaissances microscopiques sur le matériau. Il est ainsi intéressant d'examiner la pertinence du concept précédent de pression interstitielle équivalente π à la lumière des résultats fournis par ces approches "micro-macro".

La modélisation micromécanique et l'étude par homogénéisation des milieux poreux non saturés a conduit à généraliser le lemme de Hill [12]. Ce résultat très général repose uniquement sur une modélisation mixte 3D-2D de la microstructure de ces matériaux, prenant en compte les tensions de surfaces solide-fluides et fluide-fluide. Rappelons cet important résultat. À l'échelle de la microstructure que constitue un volume élémentaire $d\Omega$ de milieu poreux, on distingue un sous-domaine solide $d\Omega_s$ dans lequel s'exerce un champ de contrainte microscopique $\tilde{\sigma}_{ij}$, deux sous-domaines fluides, liquide et gaz, dans lesquels s'exerce un champ de contrainte isotrope homogène par morceaux égal respectivement à $-p_l\delta_{ij}$ et $-p_g\delta_{ij}$ et une surface $d\omega$ à l'interface des trois sous-domaines précédents dans laquelle s'exerce des efforts membranaires représentés par un champ de tenseur $\gamma\delta_{ij}^\omega$ où γ est la tension de surface et δ_{ij}^ω le tenseur unitaire du plan tangent à la surface $d\omega$,

c'est-à-dire $\delta_{ij}^\omega = \delta_{ij} - n_i n_j$ où n_i est le vecteur unitaire normale à $d\omega$. Le lemme de Hill établi par [12] conduit alors à identifier le lien entre le tenseur des contraintes macroscopiques σ_{ij} et les efforts s'exerçant à l'échelle microscopique dans les sous-domaines 3D et 2D sous la forme:

$$\sigma_{ij} = (1 - \phi) \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle_{d\Omega_s} - (\phi_g p_g + \phi_l p_l) \delta_{ij} + \frac{1}{|d\Omega|} \int_{d\omega} \gamma \delta_{ij}^\omega da \quad (105)$$

où $\langle f \rangle_V$ représente la moyenne de f sur V .

Dans le cas d'un sol saturé où la pression interstitielle de liquide est p et où les efforts d'interfaces se réduisent à la tension solide-liquide γ_{sl} s'exerçant à la surface $d\omega_s$ du solide, le tenseur des contraintes macroscopiques est alors donné par la relation

$$\sigma_{ij} = (1 - \phi) \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle_{d\Omega_s} - \phi p \delta_{ij} + \frac{1}{|d\Omega|} \gamma_{sl} \int_{d\omega_s} \delta_{ij}^\omega da \quad (106)$$

Par comparaison à (106), l'interprétation même de π comme pression interstitielle équivalente implique que dans le cas non saturé on doit avoir:

$$\sigma_{ij} = (1 - \phi) \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle_{d\Omega_s} - \phi \pi \delta_{ij} + \frac{1}{|d\Omega|} \gamma_{sl} \int_{d\omega_s} \delta_{ij}^\omega da \quad (107)$$

Pour que le concept de pression interstitielle équivalente soit pertinent, (105) et (107) doivent être simultanément vraies. On obtient alors l'identité:

$$\pi \delta_{ij} = (S_g p_g + S_l p_l) \delta_{ij} + \frac{1}{\phi |d\Omega|} \left(\gamma_{sl} \int_{d\omega_s} \delta_{ij}^\omega da - \int_{d\omega} \gamma \delta_{ij}^\omega da \right) \quad (108)$$

Le dernier terme du membre de droite de (108) représente la contribution des efforts dans les interfaces à la pression π . D'après (108) cette contribution doit se ramener nécessairement à un tenseur isotrope. En prenant la trace de ce tenseur il vient alors:

$$\frac{1}{|d\Omega|} \left(\int_{d\omega} \gamma \delta_{ij}^\omega da - \gamma_{sl} \int_{d\omega_s} \delta_{ij}^\omega da \right) = \frac{2}{3} (\gamma_{sl} \omega_{sl} + \gamma_{sg} \omega_{sg} + \gamma_{lg} \omega_{lg} - \gamma_{sl} \omega_s) \delta_{ij} \quad (109)$$

On reconnaît, dans le membre de droite de (109), la variation, à un coefficient $\frac{2}{3}$ près, de l'énergie libre des interfaces ϕU . L'équation (109) peut donc s'écrire à nouveau

$$\frac{1}{|d\Omega|} \left(\int_{d\omega} \gamma \delta_{ij}^\omega da - \gamma_{sl} \int_{d\omega_s} \delta_{ij}^\omega da \right) = \frac{2}{3} \phi U \delta_{ij} \quad (110)$$

L'isotropie des efforts s'exerçant dans les interfaces que traduit l'identité (109) ou (110) apporte ainsi un éclairage nouveau sur l'origine physique de

l'hypothèse de la pression interstitielle équivalente ou de séparation d'énergie sur laquelle elle repose. La combinaison de (108) et (110) donne une nouvelle expression de π ne reposant que sur des considérations de statique et non énergétiques:

$$\pi = S_g p_g + S_l p_l - \frac{2}{3}U \quad (111)$$

C'est ainsi le terme $-\frac{2}{3}U$, correspondant à la contribution des tensions superficielles à la contrainte macroscopique, qui est ignoré dans les approches adoptant la définition de Bishop (93) de la contrainte effective. Mais l'équation (111) montre aussi que, dans le cas déformable, il faut remettre en cause l'hypothèse d'une pression capillaire, et ainsi d'une énergie libre U , ne dépendant que de S_l et de T . C'est en effet cette hypothèse qui a conduit à l'identification (94), $\pi = S_g p_g + S_l p_l - U$. Ce constat va nous permettre de montrer, dans les sections suivantes, de quelle manière l'énergie des interfaces et les courbes de pression capillaire doivent nécessairement dépendre de la porosité ϕ .

7.2 Prise en compte de la déformation dans l'énergie libre des interfaces

Une hypothèse moins restrictive que la forme $U(S_l, T)$ adoptée à la section précédente et dans l'expression (76) de l'énergie libre consiste à faire dépendre U de la porosité comme cela a été proposée à la section 6.1 dans (77).

Avec cette expression de Ψ_{sq} , l'expression 94 de la pression interstitielle équivalente π doit être remplacée par l'expression 85, c'est-à-dire

$$\pi = S_g p_g + S_l p_l - \left(\frac{\partial(\phi U)}{\partial \phi} \right)_{S_l, T} \quad (112)$$

La comparaison de (112) et de (111) entraîne la relation différentielle partielle:

$$\frac{\partial(\phi U)}{\partial \phi} = \frac{2}{3}U \quad (113)$$

qui a pour solution

$$U(\phi, S_l, T) = \phi^{-1/3} \Gamma(S_l, T) \quad (114)$$

ou alternativement

$$U(\phi, S_l, T) = \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^{-1/3} U_0(S_l, T) \quad (115)$$

en définissant U_0 par

$$U_0(S_l, T) = U(\phi_0, S_l, T) \quad (116)$$

L'expression de l'énergie libre Ψ_{sq} prend alors la forme

$$\Psi_{sq}(\epsilon_{ij}, S_l, T) = \phi^{2/3} \Gamma(S_l, T) + \psi_s(T, \epsilon_{ij}) \quad (117)$$

La présence de l'exposant $2/3$ dans l'expression de l'énergie des interfaces $\phi^{2/3} \Gamma(S_l, T)$ s'interprète de la façon suivante. Lors d'une variation de l'espace poreux à degré de saturation et température constantes, l'énergie des interfaces varie alors uniquement en fonction de la variation de leurs aires. Au lieu de varier comme ϕ dans l'expression initiale (76), l'expression (117) montre qu'elles varient comme $\phi^{2/3}$ pour prendre en compte le caractère bidimensionnel associé à cette énergie de surface⁹.

7.3 Courbes de pression capillaire en milieu déformable

Examinons maintenant les conséquences de la nouvelle expression de Ψ_{sq} sur les courbes de pression capillaire. En l'absence d'hystérésis la loi d'état (41) prend donc la forme:

$$p_c = - \left(\frac{\partial U}{\partial S_l} \right)_{\phi, T} \quad (118)$$

Compte tenu de la forme prise par U , équations (114) ou (115), elle s'écrit plus explicitement:

$$p_c = -\phi^{-1/3} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial S_l} \right)_T \quad (119)$$

ou bien

$$p_c = - \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^{-1/3} \left(\frac{\partial U_0}{\partial S_l} \right)_T \quad (120)$$

L'exposant $-1/3$ dans (119) ou (120) indique la façon dont la pression capillaire varie lors d'une variation de l'espace poreux à degré de saturation et température constantes. Il s'interprète de la même façon que l'exposant $2/3$ de la section précédente à la différence que ce sont les distances et non les surfaces qui sont en jeu. En effet à l'échelle microscopique, la pression capillaire est inversement proportionnelle au rayon de courbure du ménisque capillaire,

⁹ Ainsi lors d'une déformation du squelette définie par le tenseur des déformations ϵ_{ij} et d'une variation de son volume poreux définie par $\delta\phi = \phi - \phi_0$, l'aire des interfaces est supposée varier comme $\phi^{2/3}$. Pour mieux comprendre ce résultat illustrons le en choisissant de décrire la déformation du squelette, à l'échelle microscopique, par une homothétie de rapport λ , c'est-à-dire par un champ de déplacement microscopique défini par $(\lambda - 1)\tilde{x}_i$, où $\tilde{x}_i$ définit le vecteur position à l'échelle microscopique. Il est alors aisé de vérifier qu'à cette échelle tout volume et, en particulier, le volume de l'espace poreux varie comme λ^3 et toutes surfaces comme λ^2 .

comme l'indique la loi de Laplace. Or ce rayon de courbure varie ici comme les distances microscopiques lors d'une déformation du squelette, à degré de saturation et température constantes, c'est-à-dire comme $\phi^{1/3}$.

Les courbes de pression capillaire étant maintenant supposées connues sous une forme $p_c(\phi, S_l, T)$ respectant (119) ou (120), l'équation d'état (118) permet d'identifier $U(\phi, S_l, T)$ sous la forme:

$$U(\phi, S_l, T) = \int_{S_l}^1 p_c(\phi, s, T) ds \quad (121)$$

et la pression équivalente π sous la forme:

$$\pi = S_g p_g + S_l p_l - \frac{2}{3} \int_{S_l}^1 p_c(\phi, s, T) ds \quad (122)$$

Cette expression de π diffère par le facteur $\frac{2}{3}$ de l'expression (94) trouvée précédemment. Paradoxalement l'approche "micro-macro", développée dans [14] confirme pourtant l'expression (94) de π lors d'une imbibition consistant à saturer un matériau poreux dont la géométrie particulière du réseau poreux (décrite à la section 5.4.2) est formée d'un ensemble de pores sphériques reliés par de fins capillaires. Toutefois la relation (122), n'est vérifiée que dans le cas de transformations non dissipatives. Or la section 5.4.2 a montré que dans un tel matériau l'imbibition correspond à une évolution dissipative due aux phénomènes d'hystérésis capillaire. Force est donc de conclure que le facteur $\frac{2}{3}$ observé dans (122) provient de la non prise en compte des phénomènes d'hystérésis.

7.4 Hystérésis en milieu déformable

Dans le cadre d'un comportement élastique pour le squelette solide, les équations d'état (39) et (42) sont conservées. En présence d'hystérésis et en conservant toujours une forme d'énergie libre donnée par les relations (117), la positivité de l'énergie dissipée (32) s'écrit:

$$-\phi(p_c + \frac{\partial U}{\partial S_l}) dS_l \geq 0 \quad (123)$$

où U est donnée par (114) ou (115). Il est alors naturel de décrire les courbes de drainage et d'imbibition en prenant en compte la déformation du squelette de la même façon que dans la section précédente. Les courbes de drainage et d'imbibition $s_D(S_l)$ et $s_I(S_l)$, introduites en 5.4.1, doivent alors maintenant dépendre, en plus de la température T , de la porosité ϕ . Elles doivent être remplacées, dans (62) et (63), par les expressions:

$$s_I(\phi, S_l, T) = \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{-1/3} s_{I0}(S_l, T) \quad (124)$$

$$s_D(\phi, S_l, T) = \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{-1/3} s_{D0}(S_l, T) \quad (125)$$

L'analyse macroscopique faite à la section 5.4.1 peut alors être reconduite entièrement à condition de remplacer U, s_I, s_D par U_0, s_{I0}, s_{D0} et d'analyser les courbes non plus dans le plan $[S_l, p_c]$ mais dans le plan $[S_l, \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{1/3} p_c]$. En particulier les inégalités (65) sont toujours vraies si bien que nous obtenons un encadrement de $U(\phi, S_l, T)$ sous la forme:

$$\int_{S_l}^1 s_I(\phi, s, T) ds \leq U(\phi, S_l, T) \leq \int_{S_l}^1 s_D(\phi, s, T) ds \quad (126)$$

et par la même occasion un encadrement de la pression équivalente π :

$$S_g p_g + S_l p_l - \frac{2}{3} \int_{S_l}^1 s_D(\phi, s, T) ds \leq \pi \leq S_g p_g + S_l p_l - \frac{2}{3} \int_{S_l}^1 s_I(\phi, s, T) ds \quad (127)$$

Faute de connaître la forme précise de l'énergie U et sans plus d'informations que celles obtenues par l'analyse macroscopique on ne peut expliciter plus l'expression de π .

Dans le cas particulier du matériau envisagé dans [14] et décrit en 5.4.2, l'information est donnée par la morphologie sphérique de l'espace poreux et l'hypothèse d'un angle de contact nul. En reprenant la démarche de la section 5.4.2 on établit dans un premier temps que les relations (66), (67) et (69) demeurent vraies à condition de remplacer respectivement $s_I(S_l)$ par $s_I(\phi, S_l, T)$, $s_D(S_l)$ par $s_D(\phi, S_l, T)$, ϕ_0 par ϕ et $U(S_l)$ par $U(\phi, S_l, T)$. Puis en permettant maintenant aux pores sphériques de se déformer de façon homothétique c'est-à-dire en vérifiant la relation

$$\frac{dR_\beta}{R_\beta} = \frac{d\phi}{3\phi} \quad \forall \beta \quad (128)$$

on montre la relation différentielle suivante sur ϕU :

$$d(\phi U) = -\frac{3}{2} \phi s_I dS_l + \frac{2}{3} U d\phi + \phi \frac{\partial U}{\partial T} dT \quad (129)$$

avec $\phi \frac{\partial U}{\partial T}$ définie par la même expression (69) de ϕU mais dans laquelle γ_{lg} est remplacée par $\frac{d\gamma_{lg}}{dT}$. On remarque aussi qu'au passage on retrouve la relation

(113), $\frac{\partial(\phi U)}{\partial\phi} = \frac{2}{3}U$. On retrouve alors des relations analogues à (71) et (72) pour $-\frac{\partial U}{\partial S_l}$ et $U(\phi, S_l, T)$ c'est-à-dire

$$-\frac{\partial U}{\partial S_l} = \frac{3}{2}s_I(\phi, S_l, T) \quad (130)$$

$$-\frac{\partial U_0}{\partial S_l} = \frac{3}{2}s_{I0}(S_l, T) \quad (131)$$

$$U(\phi, S_l, T) = \frac{3}{2} \int_{S_l}^1 s_I(\phi, s, T) ds \quad (132)$$

Avec l'expression (132) de U , on obtient ainsi π sous la forme:

$$\pi = S_g p_g + S_l p_l - \int_{S_l}^1 s_I(\phi, s, T) ds \quad (133)$$

Ce résultat, démontré dans le cadre d'une approche "micro-macro" par [14] et fondée sur l'interprétation microscopique de l'hystérésis ci-dessus adoptée, reçoit maintenant son explication dans l'identification (132).

8 Conclusions

L'approche énergétique a montré le rôle particulièrement important que joue l'énergie des interfaces solide-fluides et fluide-fluide dans le comportement aussi bien mécanique qu'hydrique des sols non saturés. La compréhension progressive du comportement du sol en termes d'énergies en le considérant tout d'abord comme indéformable puis déformable a permis de construire un cadre de modélisation basé sur l'hypothèse de séparation de l'énergie des interfaces et de celle du constituant solide. Cette hypothèse de séparation d'énergie conduit alors à l'existence d'une pression interstitielle équivalente de fluide, notée π , qui du point de vue mécanique montre que le comportement du matériau non saturé est identique à celui qu'il aurait s'il était saturé et soumis à une pression de liquide π fonction de son état actuel de saturation. La démarche montre comment calculer cette pression interstitielle équivalente notamment en fonction des courbes de pression capillaire en l'absence de phénomènes d'hystérésis. Le lien énergétique entre la pression π et ces courbes est l'énergie des interfaces. A la lumière de l'approche "micro-macro", son expression est corrigée afin de rendre compte de l'effet de la déformation sur les courbes de pression capillaire. Dans le cas des sols granulaires, où la variation de volume des grains solides peut être négligée, la déformation élastique du sol n'est *in fine* gouvernée que par la seule contrainte "effective" $\sigma_{ij} + \pi\delta_{ij}$.

L'approche énergétique macroscopique est apte à intégrer les effets d'hystérésis capillaire. L'expression de π fait toujours intervenir de la même façon l'énergie des interfaces mais à cause des phénomènes dissipatifs le lien avec les courbes de drainage et d'imbibition n'est alors plus immédiat. L'identification expérimentale macroscopique de l'énergie des interfaces, clef de l'approche, nécessite alors une interprétation microscopique de l'hystérésis capillaire dont elle est ainsi en partie tributaire. L'approche énergétique n'a traité ici que des évolutions réversibles, élastiques, du constituant solide. Les effets d'hystérésis capillaire peuvent toutefois induire des déformations irréversibles apparentes du squelette solide: aux mêmes contraintes et pressions de fluides (σ_{ij}, p_l, p_g) peuvent en effet correspondre des saturations différentes et, par couplage, des déformations différentes. Le concept de pression interstitielle équivalente π met *ipso facto* en évidence le côté apparent de ces déformations irréversibles puisqu'au même couple (σ_{ij}, π) ne correspond qu'un seul état de déformation.

Le squelette solide d'un sol, du fait notamment des mouvements irréversibles des particules solides le constituant, subit toutefois des déformations irréversibles. Pour l'argile FoCa ces déformations correspondent à la partie *AB* de la courbe de chargement de la figure 8 pour laquelle l'échantillon d'argile testé subit des variations irréversibles de l'indice des vides. Afin d'en rendre compte des modèles de comportement plastique doivent alors être développés. Un modèle phénoménologique plastique [2], qui commence à faire l'unanimité, a été élaboré dans la poursuite de l'esprit du modèle classique du "Cam-clay" développé pour les argiles saturés et a été replacé dans le contexte de l'approche énergétique [20]. Cette approche peut ainsi constituer une base générale pour l'élaboration de modèles macroscopiques de comportement élasto-plastique des sols non saturés.

References

- [1] E. E. Alonso and P. Delage, editors. *First International Conference on Unsaturated Soils/Unsat'95*, volume 1,2,3, Paris, 1995. Balkema, Rotterdam.
- [2] E. E. Alonso, A. Gens, and A. Josa. A constitutive model for partially saturated soils. *Géotechnique*, 40(3):405–430, 1990.
- [3] P. W. Atkins. *Physical Chemistry*. Oxford University Press, 4th edition, 1990.
- [4] M.A. Biot. General theory of three dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, 12:155–164, 1941.

- [5] M.A. Biot. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *Journal of Applied Physics*, 12:155–164, 1962.
- [6] M.A. Biot. Theory of finite deformation of porous solids. *Indiana University Mathematical Journal*, 33:1482–1498, 1972.
- [7] M.A. Biot. Variational lagrangian-thermodynamics of non-isothermal finite strain. mechanics of porous solid and thermomolecular diffusion. *International Journal of Solids and Structures*, 12:155–164, 1977.
- [8] A. W. Bishop. The principle of effective stress. *Teknisk Ukeblad*, 39:859–863, 1959.
- [9] T. Bourbié, O. Coussy, and B. Zinszner. *Acoustics of porous media*. Gulf Publishing Company, 1987.
- [10] G. Bruhat. *Thermodynamique*. Masson & Cie, sixième édition, 1968. revue et augmentée par Kastler, A.
- [11] J. Carmeliet. Moisture transfert and durability of open reactive porous media. In *Symposium on Building Physics in the Nordic Countries*, Espoo, Finland, 9-10 sept. 1996.
- [12] X. Chateau and L. Dormieux. Homogenization of a non-saturated porous medium: Hill’s lemma and applications. *C. R. Acad. Sc.*, 320, Iib:627–634, 1995.
- [13] X. Chateau and L. Dormieux. Comportement élastique d’un milieu poreux non saturé par homogénéisation. In C. Petit, G. Pijaudier-Cabot, and J.M. Reynouard, editors, *Ouvrages géomatériaux, modélisations multi-échelles*. Hermès, 1998.
- [14] X. Chateau and L. Dormieux. A micromechanical approach to the behaviour of unsaturated porous media. In J.-F. Thimus et al., editors, *Poromechanics, A tribute to M. A. Biot*. Balkema, 1998.
- [15] O. Coussy. Thermodynamics of saturated porous solids in finite deformation. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 8:1–14, 1989.
- [16] O. Coussy. *Mechanics of Porous Continua*. J. Wiley, 1995.
- [17] O. Coussy, R. Eymard, and T. Lassabatère. Constitutive modelling of unsaturated drying deformable materials. *J. of Engineering Mechanics*, 124:658–667, 1998.

- [18] P. Dangla and O. Coussy. Non-linear poroelasticity for unsaturated porous materials: an energy approach. In J.-F. Thimus et al., editors, *Poromechanics, A tribute to M. A. Biot. Proceedings of the Biot conference on poromechanics*. Balkema, 1998.
- [19] P. Dangla, O. Coussy, E. Olchitzky, and C. Imbert. Non linear thermo-mechanical couplings in unsaturated clay barriers. In W. Ehlers, editor, *Theoretical and numerical methods in continuum mechanics of porous materials. Proceedings of IUTAM Symposium*, 2000.
- [20] P. Dangla, L. Malinsky, and O. Coussy. Plasticity and imbibition-drainage curves for unsaturated soils: a unified approach. In S. Pietruszczak and G. N. Pande, editors, *Numerical Models in Geomechanics, NUMOG VI*. Balkema, 1997.
- [21] P. de Buhan, X. Chateau, and L. Dormieux. The constitutive equations of finite strain poroelasticity in the light of a homogenization approach. *Europ. J. Mechanics A/Solids*, 17:909–921, 1998.
- [22] R. Defay and I. Prigogine. *Tension superficielle et adsorption*. Desoer, Liège, 1951.
- [23] F. A. L. Dullien. *Porous media - Fluid transport and pore structure*. Academic Press, 1992.
- [24] D. G. Fredlund and H. Rahardjo. *Soil Mechanics for Unsaturated Soils*. J. Wiley & Sons, 1993.
- [25] D.G. Fredlund and Anqing Xing. Equations for soil-water characteristic curve. *Can. Geotech. J.*, 31:521–532, 1994.
- [26] A. Houpeurt. *Mécanique des fluides dans les milieux poreux, critiques et recherches*. Editions Technip, 1974.
- [27] T. Lassabatère. *Couplages hydromécaniques en milieu poreux non saturé avec changement de phase: application au retrait de dessiccation*. PhD thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1994.
- [28] R. W. Lewis and B. A. Shrefler. *The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media*. John Wiley & Sons, seconde edition, 1998.
- [29] G.C. Sih, J.G. Michopoulos, and S.C. Chou. *Hygrothermoelasticity*. Martinus Nijhoff Publishers, 1986.

- [30] A. W. Skempton. Effective stress in soil, concrete and rocks. *Pore Pressure and Suction in Soils*, pages 4–16, 1961.
- [31] J.-F. Thimus et al., editors. *Poromechanics, A tribute to M. A. Biot*, Proceedings of the Biot conference on poromechanics, 1998. Balkema.