

A2

Écoulement en milieux poreux

- Dissipation due au transport de fluide
- Approche générale des lois de transport
- Loi de Darcy
- Perméabilité relative
- Problème d'évolution
- Conditions aux limites et initiales

Dissipation due au transport de fluide

Dans un milieu continu en évolution on admettra que l'on a toujours :

$$\begin{aligned}d\Psi &= \mu dm \\ d(m\psi) &= -pd(\phi S_l) + \mu dm\end{aligned}$$

tandis que la dissipation due au transport de fluide (inégalité de Clausius-Duhem) prend la forme :

$$\underline{w} \cdot (-\underline{\nabla}\mu + \underline{f}) \geq 0$$

$\underline{f}$ est la force de masse appliquée au fluide (par exemple $\underline{f} = \underline{g}$).

On rappelle que : $\underline{\nabla}\mu = \frac{\partial\mu}{\partial x}\underline{e}_x + \frac{\partial\mu}{\partial y}\underline{e}_y + \frac{\partial\mu}{\partial z}\underline{e}_z$

Approche générale des lois de transport

Dans le formalisme de la thermodynamique des processus irréversibles la dissipation se met toujours sous la forme :

$$\sum_i J_i X_i \geq 0$$

où J_i sont des flux et X_i les forces motrices (gradients). La théorie linéaire des processus irréversibles consiste à relier linéairement ces flux et ces forces sous la forme :

$$J_i = \sum_j L_{ij} X_j$$

On admettra le principe général d'Onsager qui impose de plus la symétrie de la matrice :

$$L_{ij} = L_{ji}$$

La condition thermodynamique $\sum_i \sum_j X_j L_{ij} X_i \geq 0$ impose que la matrice L_{ij} soit définie et positive en plus d'être symétrique.

Loi de Darcy (1856)

La loi de Darcy entre dans le cadre du formalisme précédent. En effet pour un fluide classique on a $\mu = g$ et $dg = \frac{dp}{\rho}$, d'où :

$$\underline{J} \cdot \underline{X} = \frac{w}{\rho} \cdot (-\underline{\nabla} p + \rho \underline{f}) \geq 0$$

d'où la loi de Darcy

$$\frac{w}{\rho} = k(-\underline{\nabla} p + \rho \underline{f})$$

k est appelée la perméabilité. Son unité est $L^2 T^{-1} P a^{-1}$. On définit aussi souvent la perméabilité hydraulique $k_h = \rho g k$ dont l'unité est LT^{-1} .

Plus généralement dans un milieu anisotrope on a : $\frac{w}{\rho} = \underline{k} \cdot (-\underline{\nabla} p + \rho \underline{f})$.

$\underline{k}$ est un tenseur du second ordre symétrique défini positif (où une matrice de composante k_{ij}).

Interprétation de $\frac{\underline{w}}{\rho} \cdot (-\underline{\nabla} p + \rho \underline{f}) \geq 0$

Dans un fluide parfait incompressible en régime permanent, la charge hydraulique

$$h = \frac{p}{\rho g} + z + \underbrace{\left(\frac{1}{2g} V^2\right)}_{\approx 0}$$

est constante le long des lignes de courant. Dans un fluide visqueux il y a perte de charge ce qui signifie que

$$\frac{dh}{dt} = \underline{\nabla} h \cdot \underline{u} < 0 \quad \text{i.e.} \quad \left(\frac{1}{\rho g} \underline{\nabla} p + \underline{e}_z\right) \cdot \underline{u} < 0$$

Les expériences effectuées par Darcy à partir de 1854 (dans la cour de l'hôpital de Dijon) ont montré que le flux $\phi \underline{u}$ est proportionnel au gradient de la charge hydraulique:

$$\phi \underline{u} = -k_h \underline{\nabla} h = \frac{k_h}{\rho g} (-\underline{\nabla} p - \rho g \underline{e}_z)$$

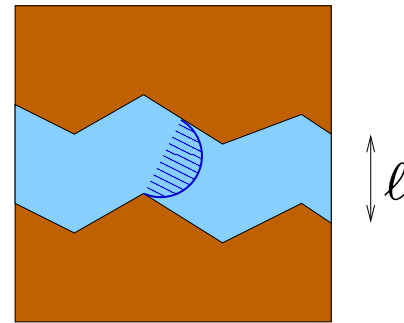
k_h est la perméabilité hydraulique du milieu poreux ($k_h > 0$ en m/s).

Perméabilité intrinsèque

Afin de rendre compte de la viscosité du fluide, appliquons une analyse dimensionnelle. Écrivons

$$J_i = f(X_i, \mu, \ell, \underbrace{\phi, \dots}_{\text{géométrie}})$$

	J_i	X_i	μ	ℓ	ϕ	$\dots$
L	1	-2	-1	1	0	0
M	0	1	1	0	0	0
T	-1	-2	-1	0	0	0



À partir de J_i , X_i , μ et ℓ on ne peut former qu'un nombre sans dimension : $\frac{J_i \mu}{X_i \ell^2}$. La relation précédente prend alors nécessairement la forme :

$$\frac{J_i \mu}{X_i \ell^2} = \chi(\phi, \dots)$$

ce qui montre que

$$k = \frac{\ell^2 \chi(\phi, \dots)}{\mu} = \frac{k_{\text{int}}}{\mu}$$

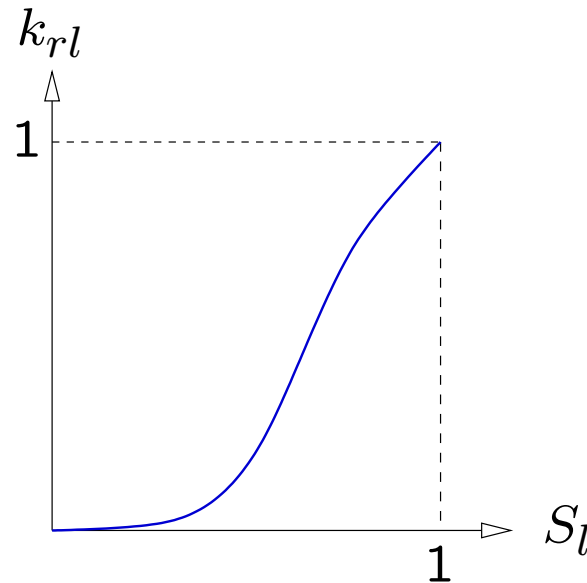
Perméabilité relative

En non saturé on écrit

$$\frac{w}{\rho} = k(S_l)(-\underline{\nabla} p + \rho \underline{f})$$

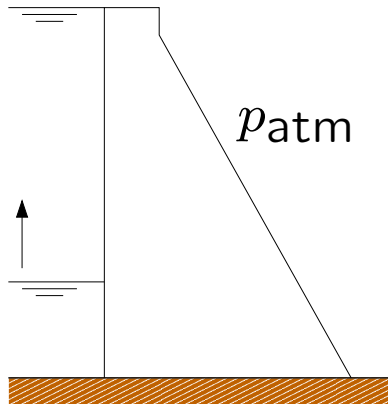
On introduit la perméabilité relative :

$$k(S_l) = \frac{k_{\text{int}}}{\mu} k_{rl}(S_l)$$



Formulation des problèmes d'écoulements

Modèle de Richards



Hypothèses :

1. $p_g(\underline{x}, t) = p_{\text{atm}} \quad \forall \underline{x}$
2. $\rho = \text{cste}, \mu = \text{cste}$

- $\frac{\partial m}{\partial t} = -\text{div} \underline{w}$
- $m = \rho \phi S_l(p_c)$
- $\underline{w} = \rho \frac{k_{\text{int}}}{\mu} k_{rl}(S_l)(-\underline{\nabla} p + \rho \underline{g})$

Équation de Richards :

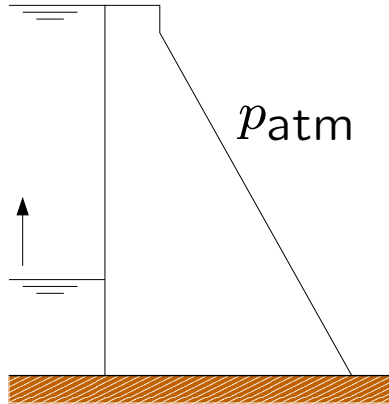
$$\phi \frac{\partial S_l}{\partial t} = -\text{div} \left(\frac{k_{\text{int}}}{\mu} k_{rl}(S_l)(-\underline{\nabla} p + \rho \underline{g}) \right)$$

Auteurs	$S_l(p_c)$
Brooks & Corey	$(p_c/p_b)^{-\lambda}$
van Genuchten	$(1 + (p_c/A)^n)^{-m}$

Milieux	$k_{\text{int}}(m^2)$
sables, graviers	$10^{-9} - 10^{-12}$
sables fins	$10^{-12} - 10^{-16}$
argile	$10^{-16} - 10^{-20}$
béton	$10^{-16} - 10^{-21}$

Attention $k_{\text{int}}(\underline{x})$ et $\phi(\underline{x})$!

Conditions aux limites et initiales



Cas général

2 types de conditions aux limites :

- $p = p^d$ sur S_p
- $\underline{w} \cdot \underline{n} = q^d$ sur S_q

avec $S_p \cup S_q = \partial\Omega$ et $S_p \cap S_q = \emptyset$

Ici

En $x = 0$ et $y \leq h(t)$: $p(0, y, t) = p_{\text{atm}} + \rho g(h(t) - y)$

En $x = 0$ et $y > h(t)$: $w_x(0, y, t) = 0$.

Partout ailleurs $\underline{w} \cdot \underline{n} = 0$.

Conditions initiales :

Par exemple $p(x, y, 0) = p_{\text{atm}} - \rho g y$