

# Calibration de Caméra à Base d'Ellipses

## Ellipse-Based Camera Calibration

Jean-Philippe Tarel, André Gagalowicz

INRIA

Domaine de Voluceau, Rocquencourt  
B.P. 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France.  
Tél : (1) 39 63 54 79  
Email: tarel@bora.inria.fr, ag@bora.inria.fr

### Résumé

Une méthode de calibration de caméra à base d'ellipses est présentée. Pour avoir une bonne estimation des paramètres du modèle de prise de vue, il est nécessaire d'avoir de bonnes mesures dans l'image. Les moments géométriques d'une région ont été choisis comme les données à fournir à l'algorithme d'estimation, car ils peuvent être calculés dans une image avec précision et robustesse en se fondant sur la photométrie des surfaces. Le lien exact entre la description d'une ellipse de l'espace 3D et les moments d'ordre inférieur ou égal à deux de sa projection est explicité en fonction des paramètres de la calibration. Ces relations sont en partie étendues au cas où les distorsions sont modélisées. Alors, l'estimation des paramètres est un problème non linéaire qui est résolu avec un algorithme itératif. Des résultats sur des images réelles et synthétiques sont présentés et discutés pour différents types de modèles de la caméra.

#### mots-clés:

*calibration de caméra, géométrie perspective, distorsions, représentations de l'ellipse, moments d'une forme, estimation sub-pixel.*

### Abstract

We present an ellipse-based camera calibration. Correct measures in the image are required to perform the camera model estimation. We suggest a technique, based upon surface photometry, allowing to compute robustly and accurately the moments of a shape in an image, and use them as inputs for the estimation algorithm. Connections between the specification of a 3D-ellipse, the moments of its image and calibration parameters are described. These equations are partially extended to models including distortions. Then, the parameters estimation is a non linear problem solved by an iterative algorithm. Tests with synthetic and real images are described and discussed for different camera models.

#### Keywords:

*camera calibration, perspective geometry, distortions, ellipse representations, shape moments, sub-pixel estimation.*

# 1 Introduction

Dans un processus de vision, il est utile de connaître un modèle approché de la caméra. Seuls les aspects géométriques sont modélisés : digitalisation de l'image, distorsions géométriques dues à l'optique de l'objectif, localisation dans l'espace de la caméra. Comme les paramètres intrinsèques du modèle de caméra sont interdépendants (par exemple, le centre se déplace quand la focale change [LT88]), il est préférable d'estimer en même temps tous les paramètres du modèle sur une vue, comme dans la méthode proposée dans [Tos87]. Une fois le type de modèle choisi, il reste alors à déterminer le type de données à utiliser pour l'estimation et le critère d'adéquation entre ces données et le modèle.

Les données les plus souvent utilisées sont des points; quelques méthodes utilisent d'autres types d'objets géométriques comme les lignes [CT90][Vai90], ou comme les ellipses [HR92][Ma93]. Avec les points, selon la modélisation et le critère d'adéquation, le problème peut être formulé linéairement ou non, avec ou sans contraintes. Ceci conduit à des méthodes analytiques [Tsa86][Tos87], ou à des algorithmes itératifs [CR90].

Pour avoir une estimation précise des paramètres, il faut contrôler un minimum l'environnement de la phase de calibration. Ainsi, une mire contrôlée géométriquement permet de disposer de données tridimensionnelles précises. Les conditions d'éclairage doivent être satisfaisantes pour que les données extraites de l'image soient suffisamment précises. Un grand nombre de données est généralement considéré pour améliorer l'estimation; néanmoins, la précision de celles-ci est directement liée à celle des mesures. Comme la précision de la méthode d'extraction des données qui sont fournies à l'algorithme de calibration est aussi importante que l'algorithme lui-même, une bonne approche du problème nécessite donc de concevoir la technique de mesure des données avec celle d'estimation du modèle.

Or l'utilisation des niveaux de gris d'une forme permet d'obtenir des informations précises sur celle-ci [Bey92][AAAM91]. Ainsi nous montrons que les moments géométriques d'une forme dans une image sont calculables avec précision, robustesse et simplicité. Après quelques rappels et notations (partie 2), la précision théorique de notre méthode de mesure des moments fondée sur les niveaux de gris est obtenue, ainsi que les conditions dans lesquelles ces mesures doivent être faites (partie 3). Nous avons pu relier

la description d'un disque elliptique de l'espace aux moments géométriques de son image (partie 4). Ces équations permettent la conception d'une méthode de calibration basée non pas sur la correspondance entre points mais sur l'utilisation des moments d'une ellipse. La méthode de résolution itérative employée est décrite (partie 5) et des résultats sur des images réelles et de synthèse sont présentés (partie 6).

## 2 Modélisation de la caméra

Une caméra réalise une transformation de l'espace réel vers le plan image. On suppose généralement que la transformation réalisée est une projection centrale par rapport au centre de la caméra : c'est le modèle sténopé. Celui-ci peut être complété par la modélisation des diverses distorsions qui entachent l'optique de la caméra.

### 2.1 Le modèle sténopé

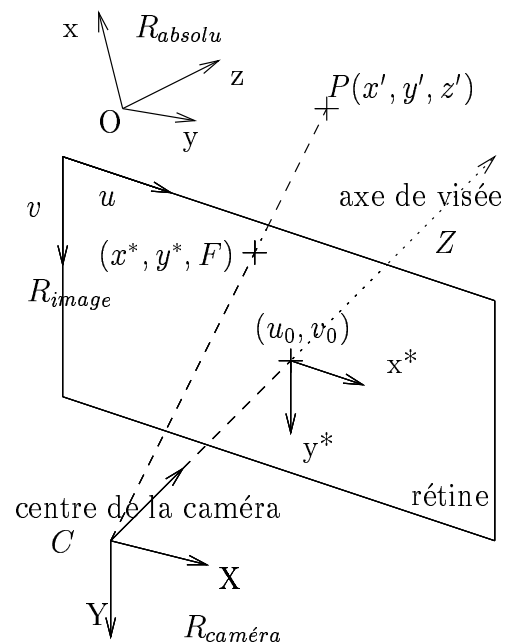


FIG. 1 - Modèle sténopé de la caméra.

Dans le modèle sténopé, l'optique est modélisée par une simple projection centrale sur le plan rétinien, de centre  $C$  (figure 1). Un point  $P$  de l'espace est repéré par rapport au référentiel absolu  $R_{absolu}$ . Les paramètres extrinsèques de la caméra sont la rotation  $R(p_1, p_2, p_3)$  et la translation  $T(t_x, t_y, t_z)$  qui correspondent aux déplacements entre les repères  $R_{absolu}$  et  $R_{caméra}$ .

La discrétisation est supposée s'effectuer sur une rétine rectangulaire avec un pas d'échantillonnage vertical  $\frac{1}{a_v}$  et un pas horizontal  $\frac{1}{a_u}$ .

Les paramètres intrinsèques sont les coordonnées  $(u_0, v_0)$  et l'inverse des pas d'échantillonnage  $a_u$  et  $a_v$ .  $(u_0, v_0)$  est la position dans l'image de l'intersection axe de visée-rétine. La relation entre les coordonnées  $(x^*, y^*)$  d'un point de la rétine et celles  $(u, v)$  dans  $R_{image}$  est :

$$\left. \begin{array}{l} u = u_0 + a_u x^* \\ v = v_0 + a_v y^* \end{array} \right\} \quad (1)$$

En composant dans l'ordre - le déplacement rigide, la projection centrale et la numérisation (1) -, on obtient la relation entre un point de l'espace et son image. Cette relation s'exprime simplement en utilisant les coordonnées homogènes (en posant  $X = (x \ y \ z \ 1)^t$  pour un point de l'espace) :

$$\left. \begin{array}{l} u = \frac{L_1 \cdot X}{L_3 \cdot X} \\ v = \frac{L_2 \cdot X}{L_3 \cdot X} \end{array} \right\} \text{ ou } U = \begin{pmatrix} su \\ sv \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} X \quad (2)$$

La transformation complète peut donc être représentée par une matrice perspective 3x4, notée  $M$ .

$$M = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_u & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & a_v & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

On remarque que  $M$  doit vérifier deux contraintes pour être compatible avec son expression en fonction de  $R, T, u_0, v_0, a_u, a_v$  (3). Si ces contraintes sont oubliées, la matrice est définie à un facteur d'échelle près, mais alors le modèle de caméra considéré ne respecte plus l'orthogonalité des axes de la rétine.

## 2.2 modèles avec distorsions

La modélisation précédente suppose que l'optique est parfaite. Les aberrations géométriques décrivent l'écart entre les positions observée et idéale de l'image d'un point de l'espace [P93]. Les seules aberrations que la calibration peut estimer sont les distorsions car celles-ci provoquent des déformations indépendamment de la direction du rayon lumineux 'source'. Seuls les premiers termes du développement limité de cet écart sont considérés. Trois types de distorsions sont plus particulièrement considérés [Bey92] [JWH90] :

- La distorsion radiale, de paramètre  $\alpha$ , est généralement la plus importante :

$$\left. \begin{array}{l} x^d = x^* + \alpha x^* (x^{*2} + y^{*2}) \\ y^d = y^* + \alpha y^* (x^{*2} + y^{*2}) \end{array} \right\} \quad (4)$$

- Le décentrage des lentilles par rapport à l'axe provoque une distorsion décrite par la relation suivante :

$$\left. \begin{array}{l} x^d = x^* + \beta(3x^{*2} + y^{*2}) + 2\gamma xy \\ y^d = y^* + \gamma(x^{*2} + 3y^{*2}) + 2\beta xy \end{array} \right\} \quad (5)$$

- Enfin, il résulte une distorsion du fait des petites erreurs de parallélisme entre lentilles. La relation qui la décrit est :

$$\left. \begin{array}{l} x^d = x^* + \delta(x^{*2} + y^{*2}) \\ y^d = y^* + \delta(x^{*2} + y^{*2}) \end{array} \right\} \quad (6)$$

La prise en compte des distorsions conduit à une relation non linéaire entre un point de l'espace et son image. En effet, pour obtenir la relation qui lie un point à son image, il faut composer dans l'ordre le déplacement rigide, la projection centrale, les distorsions (4)(5) ou (6), et la numérisation (1).

## 3 Mesures dans l'image

Pour faire une bonne estimation des paramètres du modèle de caméra, il est nécessaire d'avoir des données précises, notamment sur l'image, où la localisation doit être faite à au moins 1/10 de pixel près. Les caractéristiques géométriques d'une région de l'image comme l'aire, le barycentre et les moments d'inertie, sont faciles à mesurer avec une grande précision si on utilise les niveaux de gris. Sous certaines hypothèses, nous allons établir la précision théorique atteinte par notre méthode.

### 3.1 Principe

Un capteur CCD a une remarquable linéarité (les défauts de linéarité relatifs sont inférieurs à  $10^{-3}$ , après une correction du gamma) sur une large plage de fonctionnement. La réponse d'une cellule peut donc être supposée proportionnelle à l'éclairement reçu par sa surface [Rag89]. Ainsi, si la caméra est pointée, avec un éclairage ambiant, vers un plan noir sur lequel est peinte une forme blanche, la valeur de chaque pixel de l'image obtenue est proportionnelle à l'aire de la surface blanche vue par le pixel. Or, connaître l'aire de l'intersection entre chaque pixel et l'image de la surface blanche est utile pour calculer une valeur approchée de ses caractéristiques géométriques. En particulier, l'utilisation des niveaux de gris permet d'obtenir le barycentre de la surface avec une précision supérieure au pixel.

Cette situation est idéale, mais il est possible de s'y ramener par un traitement approprié de l'image, si l'éclairage et la mire sont bien conditionnés. En effet, se placer dans des conditions telles que les gradients d'intensité soient linéaires n'est pas difficile. La surface de la mire doit être peu spéculaire (ce qui nécessite un traitement spécial pour le métal, par exemple) pour être supposée à photométrie lambertienne, dans de bonnes conditions d'illumination. On suppose donc que l'éclairage est ambiant ou qu'il provient de sources éloignées. Dans ces conditions, les pentes des gradients lumineux peuvent être corrigées sur l'image de la mire, pour se ramener à la situation idéale.

### 3.2 Correction des gradients d'intensité

Dans l'hypothèse lambertienne, une surface rayonne de façon diffuse une fraction de la lumière reçue. En chaque point du plan  $P$  (figure 2), l'intensité émise dans une direction quelconque est :

$$I = \frac{\rho E d}{p^3}$$

Où  $\rho$  est le coefficient de réflexion diffuse, et  $E$  l'émittance de la source.

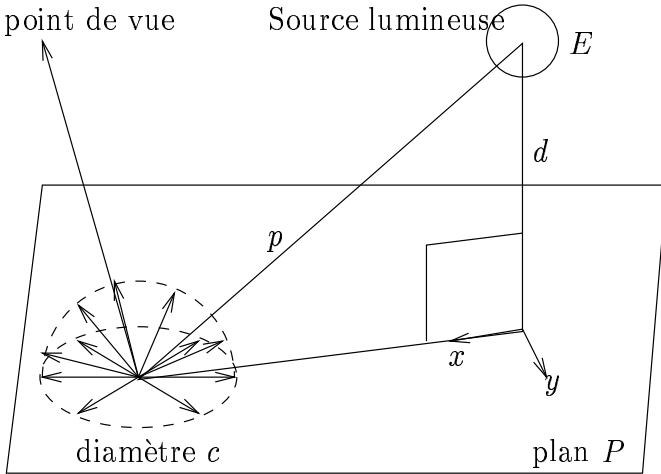


FIG. 2 - Réflexion diffuse d'une surface lambertienne.

Si l'on approxime par un plan l'intensité émise  $I$ , au voisinage d'un point  $(x_0, y_0)$ , la fonction d'erreur relative au second ordre est :

$$e_{\text{photo}} \simeq \frac{\Delta^2 I}{I} = \frac{\partial^2 I}{I \partial x^2} \Delta^2 x + \frac{\partial^2 I}{I \partial y^2} \Delta^2 y + \frac{\partial^2 I}{I \partial x \partial y} \Delta x \Delta y$$

Du fait de la symétrie circulaire, on peut se placer dans le repère de la facette qui annule  $y_0$ .

Après développement :

$$e_{\text{photo}} = \frac{3}{p^4} ((4p^2 - 5d^2) \Delta^2 y - p^2 \Delta^2 x)$$

L'erreur commise sur un disque de diamètre  $c$  se majore, à partir de la formule précédente, par  $3(\frac{c}{p})^2$ , où  $p$  est l'éloignement du centre de la facette à la source lumineuse. Pour que l'erreur soit inférieure à un niveau de gris sur une image 8 bits, il faut que  $c$  soit 30 fois plus petit que  $p$ . L'approximation au premier ordre des gradients lumineux est donc justifiée dans nos expériences, car les facettes dessinées sur la mire ont un côté de 5 cm avec une source placée à 1.5 m.

En conséquence, l'intensité de la région 'image' d'une surface lambertienne varie linéairement en fonction des coordonnées des pixels. Le plan qui approxime le mieux la distribution d'intensité de ces régions est calculé par une méthode aux moindres carrés. Dans le cas où une surface claire est observée sur un fond sombre, le calcul est réalisé sur le fond  $I_{\text{fond}}(u, v)$  et sur la région claire  $I_{\text{forme}}(u, v)$ . Ces deux équations suffisent pour normaliser l'image entre 0 et 1 pour chaque pixel  $(u, v)$  :

$$\frac{I(u, v) - I_{\text{fond}}(u, v)}{I_{\text{forme}}(u, v) - I_{\text{fond}}(u, v)}$$

La valeur 0 indique que le pixel de l'image normalisée ne voit pas la surface claire, alors que la valeur 1 indique au contraire qu'il s'intersecte en totalité avec l'image de la surface claire. On obtient une image dont la valeur d'un pixel donne le pourcentage de son aire couverte par la projection de la surface claire. L'image normalisée est donc celle qui serait observée si l'éclairage était à l'infini.

Sur la figure 3, la rupture d'intensité au niveau du contour n'est pas brutale, mais au contraire assez douce. Ce lissage est provoqué par différents phénomènes physiques : réponse électronique du capteur, effet de profondeur, aberrations et diffusion de l'optique, interactions électronique entre pixels. Typiquement avec notre caméra, un étalement de trois pixels de chaque côté du contour se produit.

### 3.3 Mesures des moments géométriques

La réponse d'une cellule CCD est proportionnelle à l'intensité reçue sur sa surface. En conséquence, pour une distribution d'intensité constante  $\lambda$ , la contribution au moment d'ordre  $(p, q)$

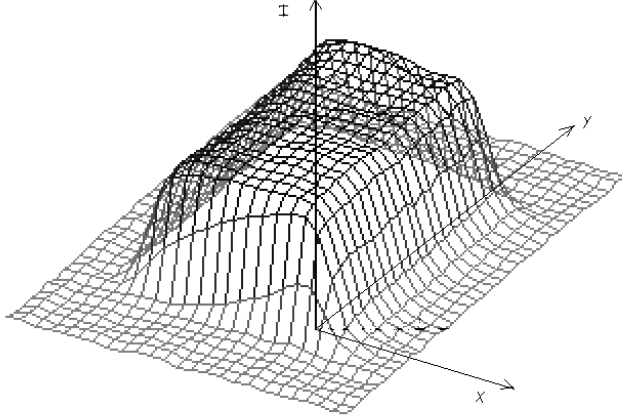


FIG. 3 - Distribution de l'intensité d'un carreau blanc sur fond noir.

du pixel  $(u, v)$ , où  $u$  et  $v$  sont les coordonnées de son coin supérieur gauche, est :

$$M_{p,q}^{pixel} = \lambda \int_{aire\ pixel} x^p y^q dx dy$$

$$= \lambda \left( \frac{(u+1)^{p+1} - u^{p+1}}{p+1} \right) \left( \frac{(v+1)^{q+1} - v^{q+1}}{q+1} \right)$$

En pondérant le moment de chaque pixel  $(u, v)$  par la valeur  $\lambda_{u,v}$  de l'image normalisée, les caractéristiques géométriques de la forme se calculent avec précision. Le moment d'ordre  $(p, q)$  est alors donné par l'équation suivante :

$$M_{p,q} = \sum_{u,v} \lambda_{u,v} \left( \frac{(u+1)^{p+1} - u^{p+1}}{p+1} \right) \left( \frac{(v+1)^{q+1} - v^{q+1}}{q+1} \right) \quad (7)$$

L'aire  $A$ , le barycentre  $G$  et la matrice d'inertie surfacique  $I$  de la région 'image' sont alors respectivement donnés par :

$$A = \sum_{u,v} \lambda_{u,v}$$

$$G = \frac{1}{A} \sum_{u,v} \lambda_{u,v} \begin{pmatrix} u + \frac{1}{2} \\ v + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$I = \frac{1}{A} \sum_{u,v} \lambda_{u,v} \begin{pmatrix} u^2 + u + \frac{1}{3} & (u + \frac{1}{2})(v + \frac{1}{2}) \\ (u + \frac{1}{2})(v + \frac{1}{2}) & v^2 + v + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Pour estimer les caractéristiques géométriques, il suffit de calculer une somme pondérée avec les niveaux de gris normalisés. L'obtention de ceux-ci ne présente pas, non plus, de difficulté sur une image de mire : le calcul et la correction des gradients d'intensité sont simples quand l'on a pu délimiter avec certitude, grâce à un détecteur de contours [Der87], une zone 'intérieure' à chaque région et une 'extérieure' voisine. Avec notre caméra, une bande de 3 pixels de chaque côté du contour est exclue.

### 3.4 Précision du calcul des moments

L'analyse des erreurs sur les moments doit tenir compte de l'erreur  $\mathbf{e}_{photo}$ , conséquence de l'approximation photométrique. Mais il y a d'autres causes d'erreur : le bruit de l'image ( $\mathbf{e}_{bruit}$ ), la quantification de l'intensité des pixels ( $\mathbf{e}_{digit}$ ) et l'indétermination de localisation provoquée par la discrétisation spatiale ( $\mathbf{e}_{local}$ ). Ces sources d'erreur sont supposées indépendantes.

**$\mathbf{e}_{bruit}$**  : Le bruit est par hypothèse gaussien centré de variance  $\sigma^2$ . L'écart type de l'erreur produite par ce bruit pour l'aire  $A$  est  $\sqrt{s}\sigma$ , où  $s$  est le nombre de pixels de la région. Pour les composantes du barycentre  $G$ , l'erreur est approximativement  $\sigma\sqrt{\left(\frac{M_{2,0}}{A^2}\right)}$  et  $\sqrt{\left(\frac{M_{0,2}}{A^2}\right)}$ . Celle-ci, sur les éléments  $I_{u,u}$ ,  $I_{u,v}$  et  $I_{v,v}$  de la matrice d'inertie, a une forme analogue en remplaçant les moments par  $M_{4,0}$ ,  $M_{2,2}$  et  $M_{0,4}$  respectivement. Une forme aplatie provoque des erreurs non équivalentes sur les composantes. Avec un disque de rayon  $R$ , l'erreur sur le barycentre est inférieure à  $\sigma$ , alors que, pour l'inertie, elle est majorée par  $\sigma R$ . En conséquence, un bruit dont l'écart type est de quelques niveaux de gris produit une erreur inférieure à 0.01 pixel sur le barycentre, pour des images 8 bits très contrastées.

**$\mathbf{e}_{photo}$**  : Dans nos expériences, l'erreur photométrique relative est inférieure à un niveau de gris sur des images contrastées. Cette erreur est beaucoup plus petite que celle provoquée par le bruit.

**$\mathbf{e}_{digit}$**  : L'erreur de quantification de l'intensité peut être décrite comme une variable aléatoire uniforme centrée de variance  $\sigma^2 = \frac{1}{12g^2}$  sur l'intensité de chaque pixel, où  $g$  est la hauteur du saut d'intensité entre la région claire et la région sombre [Der87]. Pour des images 8 bits, avec un contraste maximum ( $g = 256$ ), l'écart type est de l'ordre de  $10^{-3}$ . Comme pour  $\mathbf{e}_{photo}$ ,  $\mathbf{e}_{digit}$  est petite.

**$\mathbf{e}_{local}$**  : L'erreur provoquée par la discrétisation spatiale est nulle sur  $A$ , puisque l'aire n'est pas localisée. En annexe dans le cas d'une dimension, nous montrons que, indépendamment de la réponse de la caméra, l'erreur de résolution est de  $\frac{1}{8A}$  sur la position du barycentre, et de  $\frac{1}{4}$  sur  $I$ . À partir de ces

résultats, un passage à la dimension deux peut s'effectuer. Soit  $n_{contour}$  le nombre de pixels du contour de la région considérée, la moitié des pixels du contour peuvent biaiser la mesure dans le même sens, donc l'erreur  $e_{local}$  est majorée par  $\frac{n_c}{16A}$ . La forme qui minimise le rapport de la longueur du contour avec l'aire est un disque. Soit  $R$  son rayon, l'erreur  $e_{local}$  est alors majorée par  $\frac{1}{8R}$ . Il suffit donc d'un cercle de rayon 13 pixels pour avoir une précision de l'ordre du centième de pixel sur la position du barycentre.

L'erreur totale théorique obtenue est donc, pour un cercle, inférieure à 5/100 de pixel sur le barycentre, si le bruit est inférieur à 10 niveaux de gris. Une aussi grande précision ne peut pas être obtenue uniquement par la moyenne du contour de la région. En pratique, il est donc possible d'atteindre une erreur inférieure à 1/10, sur des images réelles de formes arrondies et compactes, si l'environnement est bien conditionné.

### 3.5 Conclusion

Il est possible de calculer les caractéristiques géométriques d'une forme plane dans une image avec une bonne précision, si elle est l'image d'une facette lambertienne de taille petite par rapport à la distance de la source lumineuse, et si sa taille dans l'image est supérieure à une vingtaine de pixels. La forme qui optimise l'erreur de localisation sur le barycentre est une forme arrondie. La méthode proposée a deux propriétés remarquables : l'estimation est assez robuste au bruit et au lissage par un filtre symétrique quelconque de l'image (en particulier pour les coordonnées du barycentre). Enfin, la méthode est relativement simple à mettre en place.

## 4 Transformation perspective d'une ellipse

Les caractéristiques géométriques d'une région de l'image peuvent être mesurées avec précision. Mais pour pouvoir utiliser les données dans la calibration, il faut être capable de les relier à la description 3D de la surface observée. L'ellipse présente un grand intérêt de part ses nombreuses propriétés vis-à-vis de la transformation perspective (ou transformation conique) [Her92]. Cependant, comment une ellipse se

transforme-t-elle par le modèle sténopé? La caméra est supposée voir l'ellipse entièrement et son image reste elliptique. De fait, les conditions de la calibration permettent ces restrictions, mais la généralisation aux coniques est aisée. À partir des différentes représentations d'une ellipse dans le plan, le lien entre l'équation d'une ellipse et ses moments géométriques d'ordre inférieur ou égal à deux sera établi.

### 4.1 Caractérisations d'une ellipse

Une ellipse peut être caractérisée dans le plan par son centre  $C$  et les vecteurs demi-grand axe  $A_1$  et demi-petit axe  $A_2$  donnés dans le repère orthonormal  $R$  (figure 4). Les points de l'ellipse sont alors décrits par :

$$X = C + \cos(\theta)A_1 + \sin(\theta)A_2 \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Cette équation se traduit en coordonnées homogènes par la relation suivante :

$$X = X_g + \cos(\theta)R_1 + \sin(\theta)R_2 \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

où  $X_g = \begin{pmatrix} C \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $R_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $R_2 = \begin{pmatrix} A_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Soit  $B$  la matrice  $3 \times 3$  constituée, dans l'ordre, des vecteurs  $R_1$ ,  $R_2$  et  $X_g$ . Cette matrice est une première caractérisation de l'ellipse dans le repère  $R$ .

L'équation dans un repère donné représente autrement l'ellipse dans le plan. L'équation implicite de celle-ci s'écrit en coordonnées homogènes sous la forme suivante :

$$X^t E X = 0$$

$E$  est une matrice symétrique  $3 \times 3$  de signature  $(\epsilon, \epsilon, -\epsilon)$ . La matrice  $E$  dans le repère  $R$  est une autre caractérisation de l'ellipse dans le plan. Cette matrice est définie à un facteur près.

Il existe un lien entre la représentation par  $B$  et celle par  $E$ . Pour l'explicitier ce lien, on se place dans le repère orthogonal  $R'$  d'origine  $C$  et de vecteurs  $A_1$  et  $A_2$  (figure 4). Dans ce repère, l'équation implicite est réduite à son expression canonique :

$$X'^t E' X' = X'^t \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X' = 0 \quad (8)$$

La matrice  $E'$  associée est alors particulièrement simple.

La transformation entre les deux repères  $R$  et  $R'$  s'explique en fonction de la matrice  $B$ . Ainsi,

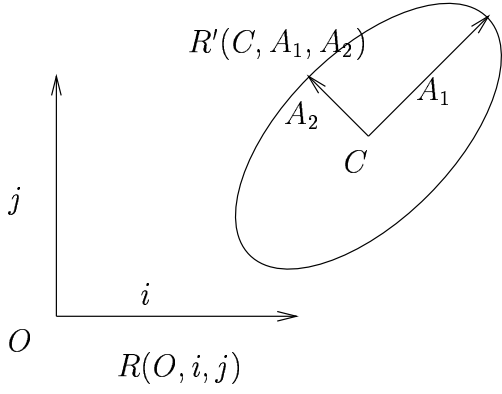


FIG. 4 - Repère absolu  $R(O, i, j)$  et canonique  $R'(C, A_1, A_2)$  d'une ellipse.

un point de coordonnées  $X'$  dans le repère  $R'$  a pour nouvelles coordonnées  $X = BX'$  dans le repère  $R$ . En réalisant le changement de repère dans l'équation implicite réduite (8), la relation entre la matrice  $E$  et  $B$  se déduit, par identification :

$$E = B^{t-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B^{-1}$$

Ce qui peut s'écrire, après inversion, puisque  $E$  est de rang 3 :

$$E^{-1} = B \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B^t \quad (9)$$

Alors, l'inverse de la matrice de la forme quadratique se décompose sous la forme suivante :

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} CC^t - A_1A_1^t - A_2A_2^t & C \\ C^t & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

On remarque que la dernière colonne de  $E^{-1}$  (ou la dernière ligne), quelque soit le repère choisi, est égale, à un facteur près, au vecteur homogène  $X_g$  qui donne la position du centre de l'ellipse dans ce repère.

## 4.2 Matrice d'inertie homogène

La matrice d'inertie homogène du disque elliptique est définie par :

$$H = \int_{\text{disque elliptique}} XX^t dS$$

Pour un disque de rayon unité dans le repère barycentrique, le calcul donne :

$$H' = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

Comme précédemment, en passant de  $R'$  au repère  $R$ , on en déduit que la matrice d'inertie homogène de l'ellipse, dans le cas général, s'écrit :

$$H = \det(B)BH'B^t$$

Cette relation est vraie uniquement si la transformation  $B$  est affine. Après un développement semblable à celui de (10), on obtient l'expression suivante :

$$H = \pi \det(A_1A_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(A_1A_1^t + A_2A_2^t) + CC^t & C \\ C^t & 1 \end{pmatrix}$$

L'aire de l'ellipse  $A$  s'avère bien être  $\pi \det(A_1A_2)$ . La relation entre la matrice d'inertie homogène  $H$  et  $E$  se déduit, par comparaison avec (10) :

$$\frac{H}{A} = \frac{1}{4}(5X_gX_g^t - E^{-1}) \quad (11)$$

Pour cette relation,  $E$  est supposée normalisée, c'est-à-dire que le dernier élément de la matrice est 1.

En conséquence, il suffit d'inverser la matrice de l'équation implicite homogène pour connaître la matrice d'inertie homogène de cette ellipse. Enfin, la seule connaissance des caractéristiques géométriques  $G$  et  $I$  permet de déterminer complètement l'ellipse. Une ellipse est donc caractérisée par ses seuls moments.

## 4.3 projection d'une ellipse

Les caractéristiques d'une ellipse  $E_{image}$ , qui est la projection perspective d'une ellipse  $E_{espace}$ , peuvent être obtenues à partir des formules précédentes. Soit  $R_1$ ,  $R_2$  et  $X_g$  les trois vecteurs (demi-grand axe, demi-petit axe et centre) qui caractérisent l'ellipse  $E_{espace}$  dans le repère absolu de l'espace. Soit  $P_{ellipse}$  le plan qui contient l'ellipse, et  $P$  un point de  $P_{ellipse}$  de coordonnées  $(x, y, 1)$  dans le repère orthogonal où l'équation de l'ellipse  $E_{espace}$  est canonique (8). Les coordonnées de  $P$  dans le repère de référence de l'espace sont :

$$(R_1 \quad R_2 \quad X_g) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'image de ce point est donc, d'après (2) :

$$U = M (R_1 \quad R_2 \quad X_g) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = MB \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

La relation entre le plan de l'ellipse  $P_{ellipse}$  et le plan 'image' est donc une transformation homogène linéaire. En conséquence, puisque (9) reste

vraie pour une transformation homogène quelconque, la matrice  $E$  de la forme quadratique de l'ellipse  $E_{image}$  a pour inverse :

$$E^{-1} = MB \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (MB)^t \quad (12)$$

À partir de (12), grâce à la remarque faite sur (10), nous pouvons déduire le centre de l'ellipse  $E_{image}$  en fonction des éléments de la matrice  $MB$ , c'est-à-dire selon les caractéristiques  $(R_1, R_2, X_g)$  de l'ellipse  $E_{espace}$  et selon les paramètres  $(L_i)$  de la transformation perspective  $M$ . Les coordonnées homogènes  $U_g = (s_g u_g \ s_g v_g \ s_g)^t$  du barycentre sont donc données, après calcul, par :

$$\left. \begin{aligned} s_g u_g &= R_1 L_1 R_1 L_3 + R_2 L_1 R_2 L_3 - X_g L_1 X_g L_3 \\ s_g v_g &= R_1 L_2 R_1 L_3 + R_2 L_2 R_2 L_3 - X_g L_2 X_g L_3 \\ s_g &= \frac{(R_1 L_3)^2 + (R_2 L_3)^2 - (X_g L_3)^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Une fois que le centre  $C = (u_g \ v_g \ 1)^t$  de l'ellipse 'image' est connu, la matrice d'inertie  $I$  s'obtient en fonction de  $M$  et  $B$  grâce à (11) :

$$I = \frac{1}{4} (5CC^t - \frac{1}{s_g} \begin{pmatrix} e_{uu} & e_{uv} \\ e_{uv} & e_{vv} \end{pmatrix}) \quad (14)$$

avec

$$\begin{aligned} e_{uu} &= (R_1 L_1)^2 + (R_2 L_1)^2 - (X_g L_1)^2 \\ e_{vv} &= R_1 L_1 R_1 L_2 + R_2 L_1 R_2 L_2 - X_g L_1 X_g L_2 \\ e_{uv} &= (R_1 L_2)^2 + (R_2 L_2)^2 - (X_g L_2)^2 \end{aligned}$$

## 4.4 Conclusion

Une ellipse est caractérisable par ses moments géométriques d'ordre inférieur ou égal à deux, et le lien entre sa description dans le plan et ses moments est relativement simple. Par l'utilisation des coordonnées homogènes, cette relation a été généralisée à la transformation perspective d'une ellipse de l'espace. Alors, le barycentre et les termes d'inertie s'expriment comme le rapport de polynômes de degré deux en fonction des caractéristiques de l'ellipse 3D et de la transformation perspective.

## 5 Résolution

Une méthode précise de calcul des moments d'une forme dans une image a été élaborée, puis quand la forme est un disque elliptique, les relations entre ces moments et l'ellipse 3D ont été explicitées. Ces relations qui lient les données mesurées sur l'image et les données tridimensionnelles de la mire permettent l'estimation des paramètres de la calibration, si la mire est supposée de géométrie parfaitement connue.

## 5.1 Critère d'adéquation

Le critère d'adéquation du modèle avec les données est choisi du type moindres carrés. Si les données sont des points  $U_i^r$  dans l'image, le critère est basé sur la distance euclidienne. Ainsi, si l'on désire minimiser la distance en pixel, le critère à choisir est :

$$\min_{paramètres} \sum_i (u_i^r - u_i)^2 + (v_i^r - v_i)^2$$

Par contre, pour l'erreur réelle sur la rétine, par exemple en millimètres, le critère à minimiser est :

$$\min_{paramètres} \sum_i \left( \frac{u_i^r - u_i}{a_u} \right)^2 + \left( \frac{v_i^r - v_i}{a_v} \right)^2$$

Ce critère a donné de meilleurs résultats de nos expérimentations.  $U_i$  s'exprime en fonction des paramètres de la calibration et des caractéristiques de la mire. Dans le cas de la correspondance point à point,  $U_i$  est donné par l'équation (2). Si les données mesurées sont les centres des ellipses images, alors l'utilisation des équations (13) s'avère nécessaire.

Il est possible de généraliser ce qui précède à un modèle de caméra autre que celui sténopé. En effet, du fait de la faiblesse des distorsions géométriques, l'image de l'ellipse peut être considérée comme uniformément distordue. Il suffit alors, pour avoir le lien entre une ellipse 3D et le centre de son image, de composer les formules de distorsions (4) (5) ou (6) avec (13).

Pour les termes de la matrice d'inertie, le critère d'adéquation est la distance des trois termes indépendants de la matrice. Avec le modèle sténopé les termes d'inertie fournissent trois contraintes supplémentaires par ellipses (11). Mais il semble difficile de les généraliser au cas avec des distorsions.

## 5.2 Méthode itérative

Le problème de la calibration d'une caméra peut s'exprimer, sous forme minimale, comme un problème non linéaire de moindres carrés sans contrainte. Pour cela, la rotation doit être représentée sous une forme minimale. Les paramètres  $(p_1, p_2, p_3)$  choisis sont ceux d'Euler-Rodrigues, car ils permettent d'écrire les coordonnées de la projection d'un point comme le rapport de deux polynômes de degré trois.

L'algorithme utilisé pour minimiser le critère est dit de Gauss-Newton [DS83]. Il nécessite le



calcul du vecteur des dérivées partielles du critère par rapport aux paramètres de la calibration, ce qui peut être facilement fait avec un calculateur formel. Les valeurs des paramètres initiaux sont obtenues par la méthode de Faugeras et Toscani [Tos87] (ceci assure une convergence rapide de l'algorithme).

## 6 Résultats

La vérification expérimentale d'une méthode de calibration est difficile, car il est nécessaire de mesurer des distances et des orientations avec une précision importante. Une première alternative à cette difficulté est de créer des images de synthèse d'une scène de calibration artificielle où la géométrie et la photométrie sont reproduites. Une autre possibilité est de vérifier la stabilité de l'estimation des paramètres intrinsèques.

### 6.1 Images de synthèses

#### 6.1.1 Précision sur les centres

Avec une scène de synthèse, la maîtrise du processus permet de connaître les erreurs faites, notamment sur la mesure des données dans l'image. Pour cela, les mesures sont comparées avec les données obtenues par calcul. Dans le tableau suivant, les erreurs de mesures, sur les barycentres de 280 ellipses de diamètre 40 pixels environ, sont calculées :

erreur	contours	intensité
maximum	1.2 pixel	0.07 pixel
moyenne	0.3 pixel	0.03 pixel
écart type	0.3 pixel	0.02 pixel

Ce tableau montre la supériorité de la méthode fondée sur l'intensité des pixels, sur celle qui utilise les contours (rapport dix en précision). L'ordre de grandeur des erreurs (5/100) est respecté par rapport au calcul théorique d'erreur (partie 3).

#### 6.1.2 robustesse au bruit

La méthode de calcul du barycentre fait une moyenne sur un grand nombre de pixels; elle doit donc être assez résistante au bruit de l'image. La robustesse a été testée et vérifiée sur des images de disques de différents diamètres, bruitées avec un bruit gaussien centré de variance

$\sigma^2$ . Le tableau suivant donne l'écart type de l'erreur provoquée uniquement par le bruit, pour deux diamètres sur une centaine de disques.

diamètre	$\sigma = 2$	$\sigma = 4$	$\sigma = 8$	$\sigma = 16$
10 pixels	0.004	0.01	0.02	0.03
20 pixels	0.0006	0.001	0.003	0.005

L'erreur sur le barycentre, due au bruit, diminue en fonction du diamètre du disque. Elle est très inférieure à la majoration prévue (partie 3), dès que le rayon est supérieur à une dizaine de pixels.

#### 6.1.3 Précision de la calibration

Quand la caméra de synthèse est un sténopé parfait, les paramètres sont tous retrouvés avec une erreur relative de moins de 0.07%. Pour initialiser l'algorithme d'estimation, la méthode de Faugeras et Toscani est utilisée. Elle est basée sur la correspondance de points. Avec le type de mire utilisé (figure 5), les points mis en correspondance sont le centre des ellipses 3D et 'image'. Malgré cette approximation, la méthode donne une estimation avec une erreur relative maximum de 0.7%. En conséquence, si le maximum de précision n'est pas nécessaire, la correspondance des barycentres peut être supposée. Ces résultats ont été obtenus, en calculant l'écart type sur 6 positions assez différentes de la caméra.

Pour se rapprocher de la réalité, une importante distorsion radiale a été ajoutée à la caméra synthétique ( $\alpha = 1.0$ ). Si la calibration est réalisée avec l'hypothèse du modèle sténopé, les résultats sont fortement perturbés. Ce biais augmente avec l'importance des distorsions. Sur 6 positions de la caméra, le centre de l'image ( $u_0, v_0$ ) est biaisé en moyenne d'une vingtaine de pixels, comme le montre le tableau suivant :

	sténopé	décentre+radial	radial
$u_0$	24 pixel	-0.3 pixel	0.1 pixel
$v_0$	27 pixel	0.2 pixel	0.01 pixel
$a_u$	390 p/mm	1 p/mm	0.46 p/mm
$a_v$	380 p/mm	0.7 p/mm	0.28 p/mm
$t_x$	-23 mm	0.4 mm	-0.1 mm
$t_y$	-30 mm	-0.2 mm	-0.02 mm
$t_z$	491 mm	1.9 mm	1.3 mm
$\theta$	$1.6^\circ$	$0.01^\circ$	$0.008^\circ$
$\alpha$		-0.002	-0.0008

Ce tableau donne les biais observés, sur les différents paramètres de la calibration, pour trois types de modèles : sténopé, avec décentrage et

distorsions radiales (4&5), avec distorsions radiales (5). On note que l'introduction de paramètres non pertinents (paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  du décentrage) induit une moins bonne estimation des autres paramètres.

## 6.2 Images réelles

Les spécifications d'une caméra réelle ne permettent généralement qu'un calcul approximatif des paramètres intrinsèques exacts. Sans référence, il est difficile de comparer les résultats des différentes méthodes de calibration. Par contre, si l'estimation des paramètres intrinsèques n'est pas stable, le modèle de caméra considéré n'est pas pertinent. En effet, quand la mire est déplacée dans le champs de vision de la caméra, sans toucher aux réglages de cette dernière, seuls les paramètres extrinsèques doivent changer d'une estimation à l'autre. Plusieurs modèles ont été testés, suivant le choix et la combinaison des divers types de distorsions (partie 2). Les estimations, avec la modélisation des distorsions radiales, se sont avérées les plus stables. Par exemple, sur une série de 12 images de la mire dans différentes positions, les résultats suivants ont été obtenus :

	$u_0$	$v_0$	$a_u$	$a_v$	$\alpha$
moyenne	252	261	1138	1613	-0.48
écart type	3.7	2.8	13.4	16.5	0.01
écart en %	1.5%	1%	1.2%	1%	3.8%

La mire est constituée de deux plans où sont peints des disques de couleur unie (figure 5).

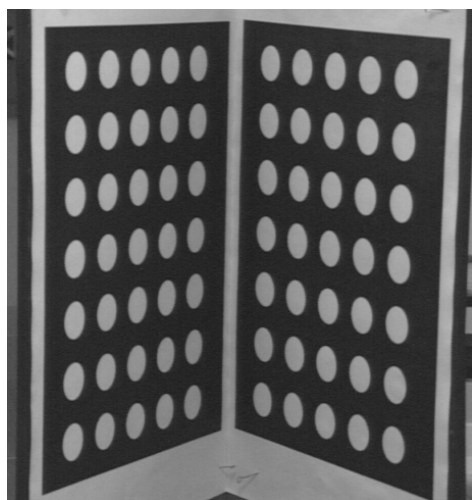


FIG. 5 - Image de la mire.

Le choix du modèle est très important. Car s'il ne possède pas suffisamment de degrés de

liberté (sur-contraint) l'estimation risque d'être biaisée, à l'opposé si le modèle est trop général (sous-contraint) l'estimation des paramètres, qu'ils soient pertinents ou non, peut-être instable. Ainsi, quand les distorsions radiales et de décentrage sont modélisées, l'estimation du coefficient de décentrage  $\beta$  varie de 143% sur la série des 12 images. Suite à nos expérimentations, avec une caméra CCD Sony couleur XC-007 le modèle adéquat semble être celui avec distorsions radiales du premier ordre.

## 7 Conclusion

La méthode de calibration présentée utilise non pas la correspondance entre points mais entre des surfaces caractérisées par leurs moments. Une technique de calcul des moments, fondée sur la photométrie des surfaces, a été développée. Elle est robuste au bruit de l'image et permet de fournir à l'algorithme de calibration des données précises (moins 1/10 de pixel sur le barycentre).

Nous avons explicité les équations qui lient les moments d'ordre inférieur ou égal à deux de l'image d'une ellipse à sa description 3D. Dans nos résultats, quelque soit le modèle, le barycentre des ellipses 'images' peut être utilisé comme donnée pour l'estimation. Les termes d'inertie fournissent trois contraintes supplémentaires dans le cas du modèle sténopé. Il semble donc intéressant d'étudier la généralisation, à un modèle quelconque, de la relation avec les moments d'ordre supérieur à deux. Des types de formes différentes du disque elliptique peuvent aussi être utilisés.

Si le modèle est bien choisi, la méthode de calibration proposée permet une bonne estimation des paramètres de la caméra (la précision est supérieure à 0.1% sur les images de synthèse). Suite à des tests avec notre caméra, le modèle avec distorsions radiales est le plus adéquat. Il permet d'estimer les paramètres de la caméra avec une erreur d'environ 2%.

## 8 Annexe

Nous présentons ici, dans le cas à une dimension, le calcul de l'erreur de localisation provoquée par la discrétisation en pixels de l'image. La réponse  $R$  de la caméra est prise en compte dans ce calcul (Figure 6).

La distribution  $CS$  observée sur l'image est le résultat de la convolution de l'échelon  $S$  par

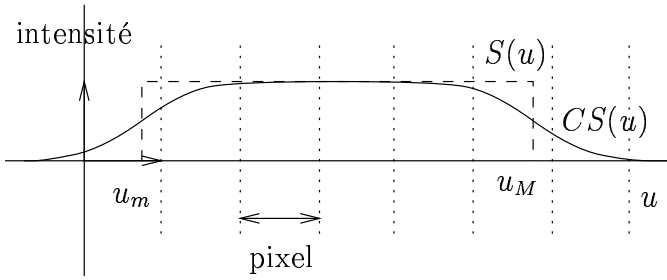


FIG. 6 - Discretisation de la courbe d'intensité d'un échelon parfait ( $u_m, u_M$ ) avant ( $S$ ) et après ( $CS$ ) convolution par la réponse de la caméra.

la réponse  $R$  de la caméra. Soit :

$$\begin{aligned} CS(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(u-x)S(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(t)S(u-t) dt \\ &= \int_{u-u_M}^{u-u_m} R(t) dt \end{aligned}$$

En conséquence, la dérivée première de  $CS$  est :

$$CS'(u) = R(u-u_m) - R(u-u_M) \quad (15)$$

La réponse est supposée normalisée. On a donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(u) du = 1 \quad (16)$$

Les moments de  $CS$  et  $S$  peuvent être calculé exactement par une intégration par parties. Alors :

$$\begin{aligned} M_p(S) &= \frac{1}{p+1} (u_M^{p+1} - u_m^{p+1}) \\ M_p(CS) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^{p+1}}{p+1} CS'(u) du \end{aligned}$$

$p$  étant l'ordre du moment. En utilisant l'équation (15), on déduit :

$$M_p(CS) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(u+u_M)^{p+1} - (u+u_m)^{p+1}}{p+1} R(u) du$$

À partir de ces formules, on peut examiner le biais que la réponse de la caméra introduit dans le calcul des moments. Ainsi les moments d'ordre zéro de  $CS$  et  $S$  sont égaux à  $u_M - u_m = M_0$ . La différence entre le moment du premier ordre observé  $M_1(CS)$  et celui réel  $M_1(S)$  est  $M_0 \int_{-\infty}^{+\infty} uR(u) du$ . En conséquence, les deux moments du premier ordre sont égaux si  $R$  vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} uR(u) du = 0$$

Ce qui est vrai dès que  $R$  est symétrique. Pour les moments du second ordre, même si  $R$  est symétrique, il est nécessaire de corriger le moment observé  $CS$  du terme  $M_0 \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 R(u) du$ . Une réponse symétrique de la caméra introduit donc un biais uniquement pour le calcul des moments d'ordre pair supérieur à deux.

Il faut aussi tenir compte de la numérisation de l'image. L'erreur de localisation due au manque de résolution est la différence entre le moment observé numérisé (7) et celui non numérisé :

$$\mathbf{e}_1(M_p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} \left( \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{p+1} - u^p \right) CS(u) du$$

L'erreur au premier ordre est :

$$\mathbf{e}_1(M_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} \left( n + \frac{1}{2} - u \right) CS(u) du$$

Soit, après une intégration par parties et quelques simplifications :

$$\mathbf{e}_1(M_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} - \int_n^{n+1} \frac{1}{2} (n + \frac{1}{2} - u)^2 CS'(u) du$$

Puisque  $\frac{1}{2}(n + \frac{1}{2} - u)^2$  varie entre  $[0, \frac{1}{8}]$ , en introduisant l'équation (15), on déduit l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{8} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} R(u-u_m) du \leq \mathbf{e}_1(M_1) \leq \frac{1}{8} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} R(u-u_M) du$$

Donc d'après l'équation (16) :

$$|\mathbf{e}_1(M_1)| \leq \frac{1}{8}$$

L'erreur sur le moment d'ordre un est donc bornée. Ainsi pour le barycentre  $G = \frac{M_1}{M_0}$ , l'erreur est majorée par  $\frac{1}{8M_0}$ . De façon similaire, l'erreur de localisation du moment du second ordre est :

$$\mathbf{e}_1(M_2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} \left( n^2 + n + \frac{1}{3} - u^2 \right) CS(u) du$$

D'où, après intégration par parties :

$$\mathbf{e}_1(M_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{n^2}{3} + \frac{2n^3}{3} + \frac{n}{3} + \frac{u^3}{3} - (n^2 + n + \frac{1}{3})u \right) CS'(u) du$$

Après approximation :

$$|\mathbf{e}_1(M_2)| \leq \frac{M_0}{4}$$

En conséquence, l'erreur sur l'inertie surfacique  $I = \frac{M_2}{M_0}$  est bornée par  $\frac{1}{4}$  et le biais sur  $I$  est  $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 R(u) du$ . Si la réponse de la caméra est une gaussienne, le biais est égal à la variance de cette dernière. Pour notre caméra, ce biais est d'environ un.

## Références

- [AAAM91] C. Ragi A. Abi-Ayad, B. Thiesse and Ph. Marthon. Les multiples facettes du problème de calibrage de caméras. In *AF CET RFIA*, 1991.
- [Bey92] H.A. Beyer. Accurate calibration of ccd-cameras. In *IEEE International Conference on Computer Vision*, pages 96–101, Champaign, Jun 1992.
- [CR90] F. Chaumette and P. Rives. Modélisation et calibration d'une caméra. In *AF CET RFIA*, 1990.
- [CT90] B. Caprile and V. Torre. Using vanishing points for camera calibration. *International Journal of Computer Vision*, 4:127–140, 1990.
- [Der87] R. Deriche. Using canny's criteria to derive an optimal edge detector recursively implemented. *International Journal of Computer Vision*, 1(2), 1987.
- [DS83] J.E. Denis and R.B. Schnabel. *Numerical methods for unconstrained optimization and non linear equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.
- [Her92] I. Herman. *The Use of Projective Geometry in Computer Graphics*. Springer-Verlag, 1992.
- [HR92] M. Han and S. Rhee. Camera calibration for three-dimensional measurement. *Pattern Recognition*, 25(2):155–164, 1992.
- [JWH90] P. Cohen J. Weng and M. Heriou. Calibration of stereo cameras using a non linear distortion model. In *Proceedings, Tenth International Conference on Pattern Recognition*, pages 246–253, Atlantic City, USA, June 1990.
- [LT88] R.K. Lenz and R.Y. Tsai. Techniques for calibration of the scale factor and image center for high accuracy 3-d machine vision metrology. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 10(5):713–720, 1988.
- [Ma93] S. De Ma. Conics-based stereo, motion estimation and pose determination. *IJCV*, 10(1), 1993.
- [P93] J.Ph. Pérez. *Optique géométrique matricielle et ondulatoire*. Masson, 1993.
- [Rag89] C. Ragi. *N.O.I.S.I.V un système pour l'expérimentation en vision passive tridimensionnelle par ordinateur*. PhD thesis, Institut national polytechnique de Toulouse, 1989.
- [Tos87] G. Toscani. *Systèmes de calibration et perception du mouvement en Vision Artificielle*. PhD thesis, Université Paris-Sud, 1987.
- [Tsa86] R.Y. Tsai. An efficient and accurate camera calibration technique for 3d machine vision. In *CVPR*, pages 364–374, Miami Beach, USA, June 1986.
- [Vai90] R. Vaillant. *Géométrie différentielle et vision par ordinateur: détection et reconstruction des contours d'occlusion de la surface d'un objet non-polyédrique*. PhD thesis, Université Paris-Sud, 1990.