

Chapitre 4

Optimisation globale pour les contours actifs

Pierre CHARBONNIER (CEREMA), Jean-Philippe TAREL (IFSTTAR/COSYS)

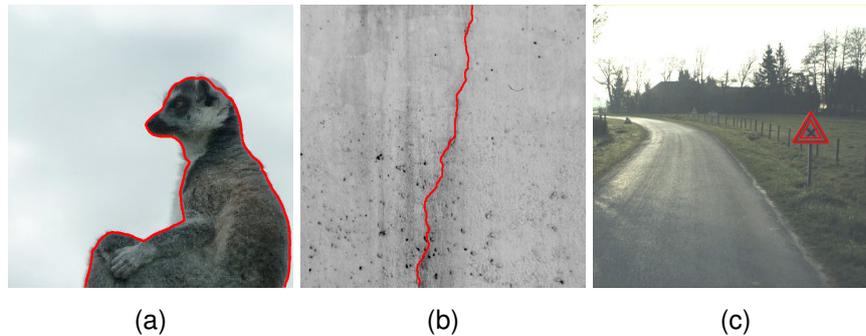
Les contours actifs sont des courbes déformables que l'on vient positionner dans les images pour y capturer des structures d'intérêt : on parle de segmentation d'images. La plupart du temps, cet ajustement est formulé comme l'optimisation d'une fonctionnelle d'énergie, caractérisée par la présence de nombreux minima locaux, correspondant à des solutions peu pertinentes. Dans ce chapitre, nous passons en revue les principaux modèles de contours actifs existants, puis nous décrivons des solutions récemment développées, assurant la détermination de solutions globalement optimales. Il s'agit, d'une part, d'algorithmes de calcul de chemins optimaux et, d'autre part, de techniques de relaxation convexe. Les premiers, adaptés à la recherche de courbes optimales entre deux points, procèdent par propagation d'une distance géodésique et rétro-parcours. Les secondes, applicables à certaines formes de contours actifs orientés région, se positionnent dans un espace convexe, en cherchant une approximation de la fonction caractéristique des régions, et optimisent une fonctionnelle elle aussi convexe.

4.1 Introduction

L'une des tâches récurrentes en analyse d'images est la *segmentation*, qui consiste à partitionner les images en régions correspondant à un fond et à un ou plusieurs objets d'intérêt. Bien qu'elle paraisse simple pour un opérateur humain, cette action n'est pas facile à automatiser, à cause de la variabilité d'aspect, parfois très complexe, des objets et du fait des perturbations, souvent importantes, des observations. Une réponse classique à ces difficultés est d'utiliser des modèles des objets ou de leurs contours. Pour cela, on utilise souvent des figures géométriques, des courbes ou des surfaces, dont la position,

Figure 4.1

Exemples de modèles déformables. Une courbe permet de segmenter la silhouette d'un animal (a) ou suivre une fissure dans une image (b). Une combinaison de polygones est adaptée à la segmentation d'un objet manufacturé (c).



la forme, voire la topologie sont gouvernées par un nombre plus ou moins important de paramètres : on parle de *modèles déformables* (figure. 4.1). Certains d'entre eux sont spécifiques à des classes d'objets particulières, par exemple : des polygones pour modéliser des objets manufacturés. D'autres, moins contraints, sont adaptés à une grande variété d'applications. C'est le cas d'une des familles les plus connues de modèles déformables : les *contours actifs* ou *snakes* (KASS, WITKIN et TERZOPOULOS, 1988). Il s'agit de courbes (en analyse d'images 2D) ou de surface (en 3D), dont l'évolution est décrite par une équation aux dérivées partielles, souvent associée à l'optimisation d'une fonction ou *critère*. Cette dernière quantifie l'adéquation de la forme en évolution à l'objet recherché en termes de données image. De plus, elle pénalise les configurations *a priori* les moins adaptées à la résolution du problème. La segmentation peut alors être vue comme la recherche d'une forme optimale, au sens de ce critère.

Ce paradigme peut être décliné de nombreuses façons, ce qui a fait le succès des contours actifs, dont un grand nombre de variantes ont été proposées au cours des 25 dernières années. Cependant, il est apparu très tôt que la mise en œuvre algorithmique de l'équation d'évolution ne permettait qu'une optimisation locale de l'énergie associée à la courbe. Il en résulte que celle-ci a un fort risque de rester « coincée » dans une configuration insatisfaisante, proche de son initialisation, surtout en présence de perturbations ou pour des images complexes. Cette sensibilité au bruit et à l'initialisation, le manque d'attractivité des modèles image, mais aussi l'impossibilité de gérer des changements de topologie de la courbe en cours d'évolution ont rapidement été identifiés comme les inconvénients majeurs des contours actifs. Ce constat a amené de nombreux chercheurs à travailler à la définition d'approches plus performantes et plus optimales, avec des niveaux plus ou moins importants d'interaction avec l'utilisateur.

Dans la première partie de ce chapitre (§ 4.2) nous présentons de manière synthétique le modèle initial des contours actifs, ainsi que deux de ses principales

évolutions : les contours actifs géodésiques et les contours actifs orientés région. Les premiers sont, comme leur nom l'indique, fondés sur l'optimisation d'une distance géodésique associée à la courbe en évolution. Les seconds recherchent une partition optimale de l'image en régions statistiquement homogènes. Les deux dernières parties sont consacrées aux algorithmes permettant d'atteindre l'optimum global dans chacun des deux cas : nous verrons comment exploiter le principe de moindre action pour trouver la courbe géodésique optimale reliant deux points désignés par l'utilisateur (§ 4.3) et comment des techniques de relaxation convexe permettent d'atteindre le minimum global pour une famille particulière de contours actifs région (§ 4.4).

4.2 Les contours actifs

Dans cette partie, nous proposons d'abord quelques rappels sur le modèle initial des contours actifs, ou *snakes*, proposé par Kass *et al.* (KASS, WITKIN et TERZOPOULOS, 1988) en 1988. Très générique, relativement simple à implanter, mais souffrant aussi d'un certain nombre de limitations, ce modèle a engendré une abondante littérature. Nous présentons ensuite deux évolutions majeures de ce modèle, les contours actifs géodésiques et les contours actifs *région*, et renvoyons le lecteur à (CHARBONNIER, 2012) pour une synthèse bibliographique plus fournie.

4.2.1 Les contours actifs classiques

Le modèle des contours actifs est, dans le cas de la segmentation en 2D, une courbe paramétrique $\Gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, ouverte ou fermée, à laquelle est associée une énergie à minimiser pour obtenir la segmentation :

$$E(\Gamma) = \alpha \int_a^b |\Gamma'(q)|^2 dq + \beta \int_a^b |\Gamma''(q)|^2 dq + \lambda \int_a^b g(|\nabla I(\Gamma(q))|) dq. \quad (4.1)$$

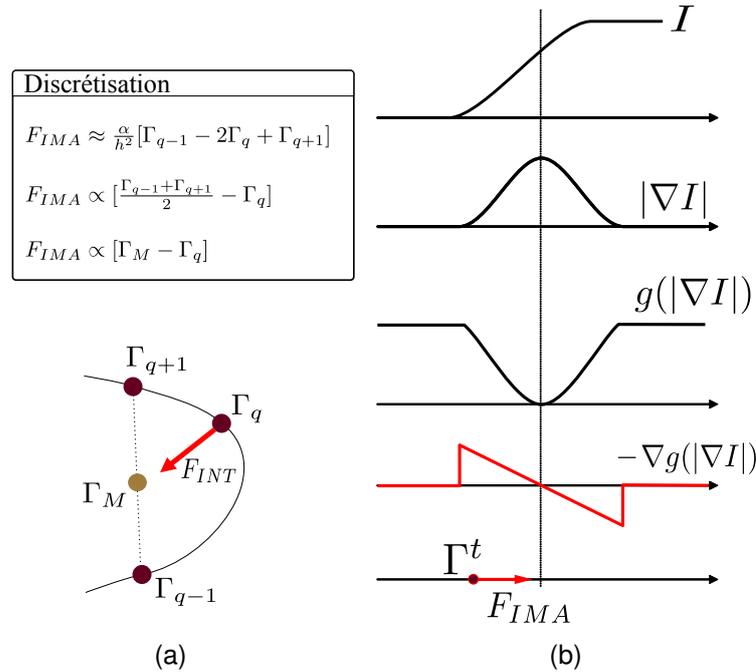
Les deux premiers termes mesurent l'élasticité et la rigidité de la courbe et leur minimisation tend donc à la régulariser. Le troisième terme mesure l'adéquation de la courbe à l'image. La fonction de *potentiel*, g , étant choisie décroissante, ce terme est minimum lorsque la courbe se situe sur les bords de l'objet à segmenter (là où le gradient de l'image, ∇I , est le plus fort). Les coefficients α , β et λ sont, la plupart du temps, réglés par l'utilisateur. Notons la formulation initiale contenait des termes supplémentaires, permettant l'interaction avec un opérateur.

La plupart du temps, l'optimisation de la fonctionnelle est effectuée par une technique de descente de gradient. Cela conduit à une équation aux dérivées partielles, appelée *équation d'évolution* du contour actif :

$$\frac{\partial \Gamma(q)}{\partial t} = \underbrace{\alpha \Gamma''(q) - \beta \Gamma^{(4)}(q)}_{F_{INT}(\Gamma)} - \underbrace{\lambda \nabla g(|\nabla I(\Gamma(q))|)}_{F_{IMA}(\Gamma, I)}, \quad (4.2)$$

Figure 4.2

(a) Illustration de la force interne F_{INT} dans le cas purement élastique, i.e. $\beta = 0$: chaque point de la courbe est attiré vers le point milieu de ses voisins (noté Γ_M). (b) Illustration de la force image, selon un profil 1D perpendiculaire à un contour dans l'image : chaque point de la courbe est attiré vers le fond du puits de potentiel g .



où Γ'' et $\Gamma^{(4)}$ représentent les dérivées spatiale seconde et quatrième, respectivement, de Γ et t est un temps artificiel. En discrétisant l'équation (4.2) en temps, on obtient pour chaque point de la courbe :

$$\Gamma^{t+1}(q) = \Gamma^t(q) + \delta t (F_{INT}(q) + F_{IMA}(q)). \quad (4.3)$$

L'évolution spatiale de chaque point de la courbe au cours du temps peut donc être vue comme la résultante de deux forces : une force interne, régularisante, (F_{INT}) et une force image (F_{IMA}). Leur effet est illustré, dans un cas simplifié, sur la figure 4.2. Malgré les nécessaires précautions à prendre sur le choix des pas de discrétisation (spatial et temporel), le modèle original est simple à mettre en œuvre. Par contre, il souffre d'un certain nombre de limitations, voire de défauts.

Ainsi, le terme élastique confère au contour actif un sens d'évolution préférentiel en contraction. La « force ballon » (force d'intensité constante, colinéaire à la normale au contour (TERZOPOULOS, WITKIN et KASS, 1988 ; L. COHEN, 1991)) permet de combattre l'élasticité naturelle de la courbe pour, par exemple, la faire évoluer en expansion. De plus, comme on le comprend sur la figure 4.2 (a), le potentiel g est constant loin des contours et le terme image est donc inopérant. Des versions plus attractives, fondées sur un lissage de la force

image par diffusion (Gradient Vector Flow, ou GVF, (XU et PRINCE, 1998)), ou bien sur l'exploitation de cartes de distance à des éléments de contours extraits préalablement (L. COHEN, 1991) ont été proposées. Par ailleurs, le bruit présent dans les images provoque des puits de potentiels parasites, qui peuvent bloquer le contour actif loin de la solution recherchée. Pour améliorer la convergence des contours actifs fermés, des schémas algorithmiques alternatifs, multi-résolution (LEROY, HERLIN et L. COHEN, 1996), incrémentiels (BERGER, 1991), ou encore fondés sur l'utilisation de deux snakes couplés (GUNN et NIXON, 1997; VELASCO et MARROQUIN, 2001), ont été proposés.

Le schéma algorithmique de base a également été adapté pour gérer la fusion de courbes entre elles ainsi que leur scission (MCINERNEY et TERZOPOULOS, 1995; DURIKOVIC, KANEDA et YAMASHITA, 1995; DELINGETTE et MONTAGNAT, 2000; PRECIOSO et BARLAUD, 2002). Les mécanismes additionnels développés pour gérer ces changements de topologie offrent une souplesse accrue par rapport à l'initialisation des courbes. En particulier, la technique des *seed-snakes* (MCINERNEY et TERZOPOULOS, 1995), consistant à paver l'espace image de contours actifs capables de fusionner entre eux ou de disparaître s'ils ne rencontrent aucun objet d'intérêt, est aujourd'hui une stratégie d'initialisation très répandue.

Enfin, bien que des schémas de discrétisation le plus courant reste celui des différences finies, des alternatives sont parfois employées (éléments finis (PENTLAND et HOROWITZ, 1991; L. COHEN et I. COHEN, 1993), polygones (FUA et LECLERC, 1990; CHESNAUD, RÉFRÉGIER et BOULET, 1999), *splines* (MENET, SAINT-MARC et MEDIONI, 1990; BRIGGER, HOEG et UNSER, 2000), descripteurs de Fourier (STAIB et DUNCAN, 1992; LEROY, HERLIN et L. COHEN, 1996; DUFRESNOIS, 2000)). Dans tous les cas, le résultat obtenu demeure sensible à la paramétrisation de la courbe.

4.2.2 Les contours actifs géométriques et géodésiques

4.2.2.1 Équations d'évolution

Une approche alternative, issue de travaux de recherche sur la théorie de l'évolution de courbes, est apparue au début des années 1990. Il s'agit d'étudier l'évolution dans le temps d'une courbe fermée Γ , selon une équation aux dérivées partielles (EDP) du type :

$$\frac{\partial \Gamma(s)}{\partial t} = F(s)\mathcal{N}, \quad (4.4)$$

où \mathcal{N} représente la normale unitaire (entrante) à la courbe. F est une fonction vitesse, fondée sur des quantités géométriques, indépendantes de la paramétrisation de la courbe.

Ainsi, lorsque l'amplitude de la force est une constante, ν , on obtient une évolution selon la force ballon. Notons que celle-ci correspond, selon le signe de ν à la minimisation ou à la maximisation de l'aire de la région définie par la courbe. Lorsque la force est d'amplitude proportionnelle à la courbure κ , la courbe évolue

Optimisation de formes en sciences de l'ingénieur

comme un élastique. Cette EDP correspond à la minimisation de la longueur de la courbe (on l'appelle *Euclidean shortening flow*).

Ces deux forces fournissent donc naturellement le « moteur » d'un contour actif. Pour stopper l'évolution de la courbe lorsqu'elle atteint les bords des objets, il suffit de multiplier la vitesse par une fonction décroissante de la norme du gradient de l'intensité. On obtient donc :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = g(|\nabla I|)(\nu + \kappa)\mathcal{N}. \quad (4.5)$$

Cette équation correspond aux contours actifs *géométriques*, proposés indépendamment dans (CASELLES, CATTÉ et al., 1993) et dans (MALLADI, J. SETHIAN et VEMURI, 1995). La fonction g ne s'annulant jamais complètement, on peut ajouter à cette équation un terme d'arrêt supplémentaire, attirant le contour vers le minimum du potentiel g associé aux contours des objets. On obtient ainsi l'EDP des contours actifs *géodésiques* (CASELLES, KIMMEL et SAPIRO, 1997; KICHENASSAMY et al., 1996) :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = g(|\nabla I|)(\nu + \kappa)\mathcal{N} - \langle \nabla g, \mathcal{N} \rangle \mathcal{N}. \quad (4.6)$$

Leur dénomination provient du fait que (4.6) correspond (pour $\nu = 0$) à la minimisation d'une longueur géodésique de la courbe, la métrique utilisée dépendant de l'image *via* la fonction g :

$$L_g(\Gamma) = \int_0^1 g(|\nabla I(\Gamma(q))|)|\Gamma'(q)|dq = \int_0^{L(\Gamma)} g(|\nabla I(\Gamma(s))|)ds, \quad (4.7)$$

où $L(\Gamma)$ est la longueur géométrique de la courbe et s , l'abscisse curviligne. On montre (CASELLES, KIMMEL et SAPIRO, 1997; AUBERT et BLANC-FÉRAUD, 1998), que ce flot correspond également à la minimisation d'un critère de contour actif, sans contrainte de rigidité (i.e. dans le cas où $\beta = 0$). De fait, une comparaison des équations d'évolution renforce cette impression de proximité entre les deux approches, comme remarqué dans (CHARBONNIER et CUISENAIRE, 1996) et (XU, PHAM et PRINCE, 2000; XU, YEZZI et PRINCE, 2000). En posant $\alpha = 1$, $\beta = 0$ et en se plaçant en paramétrisation intrinsèque, ce qui entraîne $\Gamma''(s) = \kappa(s)\mathcal{N}$, l'équation d'évolution du contour actif classique (4.2) s'écrit :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \kappa\mathcal{N} - \lambda\nabla g(\Gamma). \quad (4.8)$$

On constate, en comparant (4.6) et (4.8), que la différence tient en la multiplication de la force interne par la fonction g , ce qui tend à la relaxer à proximité des contours des objets, en la projection de la force image sur la normale, ce qui est gage de stabilité dans une implantation paramétrique (CHARBONNIER et CUISENAIRE, 1996) et en l'introduction de la force ballon, ce qui favorise la convergence.

Les contours actifs géodésiques apparaissent ainsi comme une version de contours actifs plus performante, à la fois par rapport au modèle classique et au modèle géométrique. C'est, certainement, l'une des explications du succès de cette approche. Celui-ci doit cependant beaucoup à l'algorithmique associée, la technique des *Level Sets*, qui permet une gestion transparente des changements de topologie et une indépendance vis-à-vis des problèmes de paramétrisation.

4.2.2.2 Algorithme des *Level Sets*

L'algorithme d'évolution de courbe par lignes de niveaux ou *level-sets* est né, à la fin des années 1980, de travaux de recherche portant sur la simulation numérique en mécanique des fluides, et plus particulièrement, sur l'évolution d'interfaces (OSHER et J.A. SETHIAN, 1988).

Son principe se fonde sur une représentation intrinsèque, eulérienne, de la courbe en évolution. Celle-ci est considérée comme la ligne de niveau 0 d'une fonction *hôte*, ψ , fonction scalaire de la variable d'espace et suffisamment régulière. Classiquement, on choisit pour ψ la fonction distance signée : la région intérieure à Γ , notée Ω_{int} correspond, par exemple, à des niveaux négatifs tandis que la région extérieure, Ω_{ext} , reçoit des valeurs positives. On note que dans ce cas, $|\nabla\psi| = 1$ et que les quantités géométriques intervenant dans l'équation d'évolution (4.4) peuvent s'exprimer à partir de ψ . Par exemple, la courbure s'écrit : $\kappa = \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}$.

Par ailleurs, en dérivant la relation $\psi(\Gamma) = 0$, on montre facilement que si la courbe Γ évolue selon (4.4), alors :

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = F|\nabla\psi|. \quad (4.9)$$

Ainsi, l'algorithme d'évolution de courbe consiste à construire la fonction ψ à partir de la courbe initiale $\Gamma(s, t = 0)$, à la faire évoluer selon (4.9) jusqu'à convergence et à en extraire finalement la courbe de niveau 0.

Même si un certain nombre de précautions doivent être prises lors de sa mise en œuvre (J.A. SETHIAN, 1999; OSHER et FEDKIW, 2003), notamment pour éviter tout problème numérique, l'algorithme des *Level Sets* offre plusieurs intérêts, qui expliquent son très fort succès. Tout d'abord, la représentation eulérienne utilisée permet de s'affranchir des questions liées à la paramétrisation de la courbe, inhérentes aux représentations explicites, lagrangiennes. D'autre part, la méthode se généralise facilement au cas 3D. Enfin, et surtout, la topologie de la courbe de niveau 0 évolue librement au cours du temps, sans qu'il soit besoin de gérer directement les scissions ni les fusions.

4.2.3 Les contours actifs *région*

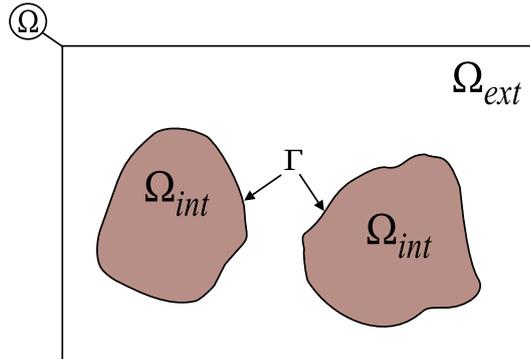
L'un des défauts que présentent les modèles décrits précédemment est que la force image qui leur est associée ne dépend que d'informations évaluées le long de la courbe Γ . On parle d'approche *frontière* ou *contour*. Par ailleurs, ces informations sont le plus souvent reliées au gradient de l'image, dont le calcul numérique est sensible au bruit. Un concept alternatif, celui des contours actifs orientés région, est apparu vers le milieu des années 1990 (L. COHEN, BARDINET et AYACHE, 1993; RONFARD, 1994; ZHU et YUILLE, 1996), se développant surtout dans les années 2000, à la suite de (CHAN et VESE, 2001). L'idée est de formuler le problème de segmentation de l'image comme un problème de partitionnement. Dans le cas à deux régions (ou *phases*), la région intérieure à la courbe fermée

Optimisation de formes en sciences de l'ingénieur

Γ correspond à l'objet recherché, tandis que la région extérieure représente le fond, comme l'illustre la figure 4.3.

Figure 4.3

Partitionnement du domaine image, Ω en une région de fond, Ω_{ext} , et une région correspondant à l'objet d'intérêt, Ω_{int} . Le contour actif, Γ , marque la frontière entre les deux régions. D'après (FOULONNEAU, 2004).



Les régions, potentiellement disjointes, sont supposées homogènes et facilement discernables entre elles en termes de statistiques. Elles sont décrites soit par une fonction densité de probabilité, soit par des moments statistiques (moyenne, variance) ou des paramètres déduits comme l'entropie. Ces caractéristiques peuvent être supposées connues, issues d'une phase d'apprentissage, ou bien évaluées au fur et à mesure de l'évolution de la partition. À partir de ces *descripteurs* de régions (et, éventuellement, de termes *contour* (PARAGIOS et DERICHE, 2002)), on définit une fonctionnelle, dont la minimisation conduit à l'équation d'évolution du contour actif.

4.2.3.1 Le modèle de Chan et Vese

Il existe de nombreuses façons de définir des fonctionnelles d'énergie pour les contours actifs région. La formulation la plus souvent citée a été proposée par Chan et Vese (CHAN et VESE, 2001) pour le cas à 2 régions, puis étendue au cas multi-phases dans (VESE et CHAN, 2002). Dans sa forme la plus générale, elle s'écrit :

$$E_{CV}(u_i, \Gamma) = \sum_{i=1}^{N_{reg}} \int_{\Omega_i} (u_i - I)^2 dx + \nu |\Gamma|, \quad (4.10)$$

où Ω_i note les N_{reg} régions délimitées par l'ensemble des courbes, Γ , dont la longueur totale est notée $|\Gamma|$. Le premier terme tend à imposer aux régions d'être aussi homogènes que possible en termes d'intensité, autour d'une valeur caractéristique u_i . Le second impose des frontières aussi courtes que possible et promet donc la régularité des courbes. On note que, si l'on fixe Γ , l'optimum de la fonctionnelle est atteint lorsque, pour tout i , u_i correspond à μ_i , la moyenne empirique de I dans la région Ω_i . Par ailleurs, si on fixe les constantes u_i ,

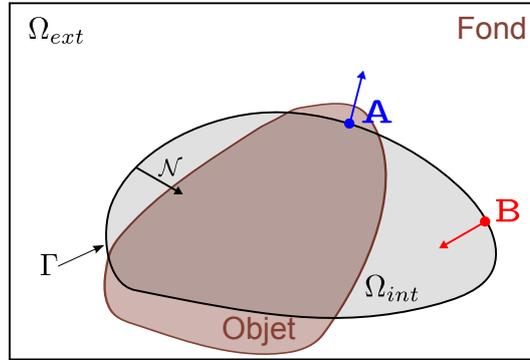
l'évolution de la courbe permettant de minimiser E_{CV} obéit (dans le cas à $N_{reg} = 2$ classes) à l'équation :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = ((I - \mu_{int})^2 - (I - \mu_{ext})^2)\mathcal{N} + \nu\kappa\mathcal{N}, \quad (4.11)$$

où μ_{int} et μ_{ext} sont la moyenne de la région intérieure à la courbe et la moyenne du fond, respectivement.

Figure 4.4

Interprétation de la force image $((I - \mu_{int})^2 - (I - \mu_{ext})^2)\mathcal{N}$ en deux points du contour actif, dans le cas où \mathcal{N} , la normale à la courbe Γ est dirigée vers l'intérieur. L'intensité au point A est proche de μ_{int} et la force (en bleu) est donc contraire à la normale. Au point B, l'intensité est proche de μ_{ext} et la courbe a tendance à se contracter (flèche rouge).



La figure 4.4 illustre le fonctionnement du premier terme de (4.11), qui correspond à la force image s'appliquant en chaque point de la courbe en évolution. On note que si l'on considère que les deux régions ont une densité de probabilité gaussienne, de même variance et de moyennes respectives μ_{int} et μ_{ext} , l'équation d'évolution (4.11) est équivalente à :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = (\log(p_{ext}(I)) - \log(p_{int}(I)))\mathcal{N} + \nu\kappa\mathcal{N}, \quad (4.12)$$

On retrouve ainsi, dans le modèle de Chan et Vese, un cas particulier de la notion de *compétition de régions* proposée par Ronfard (RONFARD, 1994) et formalisée dans (ZHU et YUILLE, 1996) : l'évolution de la courbe tend à englober un point dans la région dont il est statistiquement le plus proche.

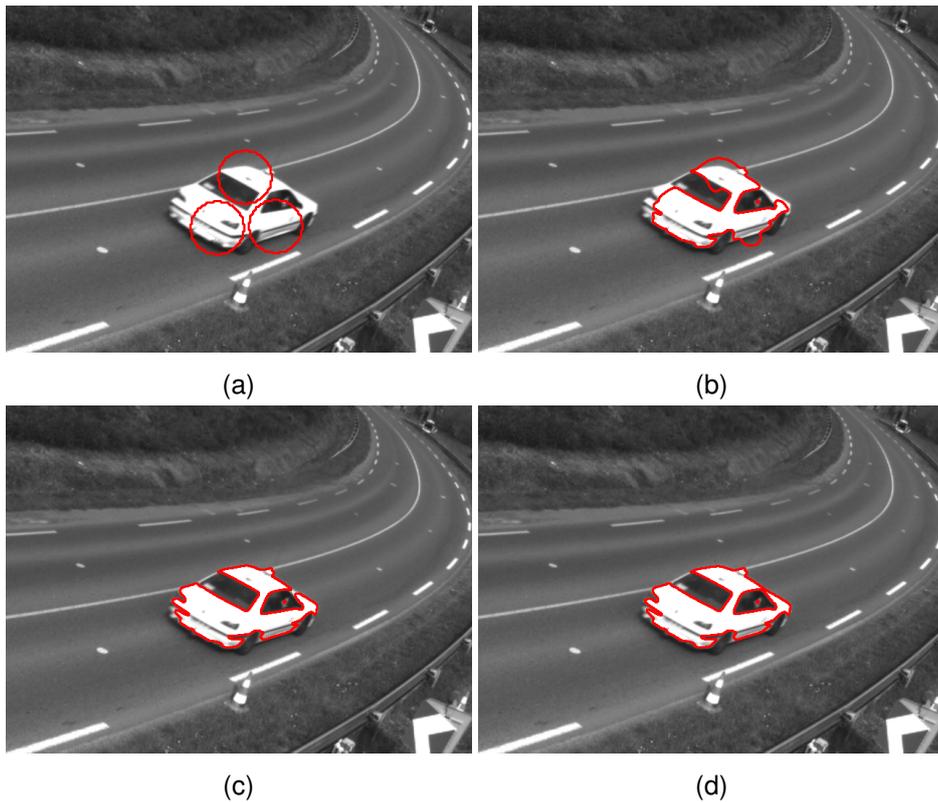
L'algorithme d'optimisation proposé dans (CHAN et VESE, 2001 ; VESE et CHAN, 2002) effectue de façon alternée le calcul des moyennes et l'évolution de la courbe selon (4.11), jusqu'à ce que la courbe n'évolue plus. La figure 4.5 montre un exemple d'application de cette méthode sur une image en niveaux de gris.

4.2.3.2 Autres modèles

Comme celle de Chan et Vese, beaucoup de fonctionnelles de contours actifs région favorisent l'homogénéité des régions formant la partition de l'image.

Figure 4.5

Exemple de segmentation par contour actif orienté région (CHARBONNIER, 2009) : modèle de Chan et Vese. Image originale et initialisation (a), résultat après 10 (b), 20 (c) et 31 itérations, résultat final (d). Image IFSTTAR Nantes. Le contour est épaissi pour une meilleure visualisation.



L'approche alternative en reconnaissance des formes consiste à rechercher des régions aussi *dissemblables* entre elles que possible. C'est, par exemple, ce que proposent Yezzi *et al.* dans (YEZZI, A. TSAI et WILLSKY, 1999), où la différence quadratique des moyennes (ou des variances) des régions est maximisée. Nous renvoyons le lecteur intéressé à (CREMERS, ROUSSON et DERICHE, 2007; CHARBONNIER, 2009) pour un aperçu plus complet des modèles de contours actifs région.

Notons que les paramètres statistiques des régions, qui interviennent dans la plupart des fonctionnelles dépendent de la position des frontières. Il y a lieu de tenir compte de ces dépendances lors de la dérivation des équations d'évolution. La notion de dérivée de domaine ou dérivée eulérienne, issue des travaux de Zolésio (SOKOLOWSKI et ZOLÉSIO, 1992; DELFOUR et ZOLÉSIO, 2001) et également employée dans l'estimation du flot optique (SCHNÖRR, 1992), offre un

cadre théorique rigoureux pour effectuer ce type de calculs (AUBERT, BARLAUD et al., 2003).

4.2.3.3 Bilan

Les contours actifs région ont un certain nombre de bonnes propriétés vis-à-vis de la tâche de segmentation. En premier lieu, ils prennent en compte l'information image d'une manière plus globale que les approches frontière, ce qui les rend moins sensibles à l'initialisation¹. Par ailleurs, les contours actifs région n'impliquent pas forcément de dérivation de l'image, ce qui est gage de stabilité numérique. Enfin, ils offrent la possibilité de segmenter des régions sans frontière apparente (CHAN et VESE, 2001 ; J. KIM et al., 2005).

Au passif de ces méthodes, on notera que le cas des régions multiples (cas multi-phases) est beaucoup plus difficile à gérer que le cas de la segmentation binaire. De plus, même si la technique des *seed-snakes* permet d'améliorer les choses, la mise en œuvre de ces modèles repose sur une technique de descente de gradient. Les solutions obtenues correspondent donc généralement à des optima locaux des fonctionnelles, ce qui n'est pas totalement satisfaisant.

4.3 Optimisation globale par recherche de chemin minimal

Les approches que nous allons présenter dans ce paragraphes permettent de déterminer la courbe réalisant le minimum global d'une énergie de type contour actif géodésique. Comme nous l'avons fait remarquer à la section 4.2.2, de telles énergies peuvent également être vues comme des longueurs, dans une métrique dépendant de l'image. L'optimisation s'apparente donc à une recherche de chemin de longueur minimale. La solution globalement optimale peut être atteinte dans deux cas : celui des courbes ouvertes définies entre deux points, P_0 et P_1 , désignés par l'utilisateur et celui des courbes fermées englobant un point P . Outre le modèle énergétique employé, ces deux approches ont donc en commun la nécessité d'une interaction avec l'utilisateur.

4.3.1 Cas des courbes ouvertes

Dans (L. COHEN et KIMMEL, 1997), Cohen et Kimmel proposent de rechercher, dans l'image à segmenter, la courbe minimisant une énergie de type contour actif

1. Cette affirmation est toutefois à nuancer pour certains types d'images, comme on en rencontre en imagerie médicale, sujettes à de fortes variations spatiales d'intensité, ou pour des objets de nature hétérogène. Des approches région plus locales (LI et al., 2008 ; LANKTON et TANNENBAUM, 2008 ; BROX et CREMERS, 2009) ont été développées récemment pour gérer ces situations.

Optimisation de formes en sciences de l'ingénieur

géodésique, très proche de (4.7) :

$$E'_g(\Gamma) = \alpha \int_0^{L(\Gamma)} |\Gamma'(s)|^2 ds + \int_0^{L(\Gamma)} g(\Gamma(s)) ds = \int_0^{L(\Gamma)} \tilde{g}(\Gamma(s)) ds = L'_g(\Gamma) \quad (4.13)$$

où s représente l'abscisse curviligne, g est le potentiel image habituel et $\tilde{g} = \alpha + g$. Le potentiel est, selon l'application considérée, une fonction de l'intensité (ex. : suivi de lignes, fissures, routes, vaisseaux sanguins) ou de son gradient le long de la courbe (ex. : suivi du bord d'objets), nous le notons $g(\Gamma)$ pour simplifier. On remarque que le passage d'énergie à longueur géodésique est, ici, direct puisque $|\Gamma'(s)| = 1$ en paramétrisation intrinsèque (*i.e.* par l'abscisse curviligne). Le scalaire α joue le paramètre de régularisation : on peut montrer (L. COHEN et KIMMEL, 1997) que la courbure maximale que peut prendre la courbe solution est inversement proportionnelle à α .

4.3.1.1 Stratégie d'optimisation

Le calcul de la courbe minimisant (4.13) est réalisé selon la stratégie suivante : dans un premier temps, une *surface d'action minimale* $U_0(x)$, fonction scalaire de la variable d'espace, est calculée. Sa valeur au point x est l'énergie associée au chemin optimal, au sens de la distance géodésique L'_g , reliant x à P_0 . Dans un second temps, lorsque $U_0(P_1)$ est déterminée, un simple rétro-parcours par descente de gradient permet d'extraire le chemin optimal recherché. On peut également extraire des chemins multiples, reliant plusieurs points d'arrivée au même point de départ. Le lecteur intéressé pourra se référer à (L. COHEN et KIMMEL, 1997 ; T. DESCHAMPS, 2001) pour plus de détails.

On montre (voir, par exemple, (FOMEL, 1997 ; L. COHEN et KIMMEL, 1997)) que la surface d'action minimale obéit à l'équation eikonale² :

$$\tilde{g}(x) = |\nabla U_0(x)|. \quad (4.14)$$

avec $U_0(P_0) = 0$. On note que si \tilde{g} est une constante, la surface d'action minimale correspond à une simple carte de distance euclidienne au point de départ. Plusieurs approches sont envisageables pour résoudre cette équation. La plus immédiate consiste à la discrétiser et à appliquer un schéma itératif (ROUY et TOURIN, 1992). Cette approche a toutefois une complexité en $O(N^2)$, où N est le nombre de points de la grille. La méthode usuelle, plus rapide, consiste à calculer U_0 par propagation à partir du point de départ, P_0 pour lequel la valeur de U_0 est nulle. Cette idée apparaît déjà dans (QIN et al., 1992), mais c'est en faisant le lien avec l'algorithme A^* de Dijkstra (DIJKSTRA, 1959), utilisé pour le recherche de plus court chemin dans les graphes, que Tskitsiklis (TSITSIKLIS, 1995), puis (de manière indépendante) Sethian (J.A. SETHIAN, 1996) proposent des algorithmes réellement efficaces, de complexité $O(N \log N)$ ³.

2. Cette équation, due à Hamilton, est à la base de l'optique géométrique, d'où sa dénomination, proposée par Burns en 1895 (« eikonal » venant du mot grec « εἰκων » signifiant « image »). Pour plus de développements sur l'analogie avec l'optique géométrique, voir la thèse de T. Deschamps (T. DESCHAMPS, 2001).

3. Voir également (HELMSEN et al., 1996).

4.3.1.2 Algorithme A^*

L'algorithme A^* utilise le principe d'optimalité de Bellman, exploité en programmation dynamique : le chemin le plus court est propagé d'un point à ses voisins, par ajout de la contribution locale \tilde{g} minimale. Une valeur de U_0 peut donc être affectée à un point dès lors que l'un de ses voisins est atteint. Naturellement, le point doit rester *vivant* (i.e. sa valeur de U_0 doit pouvoir être revue à la baisse) jusqu'à ce qu'il devienne lui-même le minimum des points vivants. En effet, il est alors impossible de trouver un chemin géodésique plus court pour l'atteindre. L'utilisation d'une structure de tas ordonné pour extraire à chaque instant le point de valeur U_0 minimale parmi les points vivants confère à l'algorithme une complexité en $O(N \log N)$. Les algorithmes de délimitation d'objets tels que le *Live Wire* (FALCÃO et al., 1998) ou les *Intelligent Scissors* (MORTENSEN et BARRETT, 1995; MORTENSEN et BARRETT, 1999) implantés dans des logiciels de traitement d'image comme Gimp utilisent, de manière interactive, le même genre de méthode que l'algorithme A^* .

4.3.1.3 Algorithme *Fast Marching*

On peut remarquer que l'ensemble des points vivants se comporte comme un front, de valeur U_0 à peu près constante, et progressant à partir de P_0 à une vitesse spatiale inversement proportionnelle au potentiel local \tilde{g} . Cette observation est à la base de l'algorithme *Fast Marching* de Sethian (J.A. SETHIAN, 1996), qui considère le calcul de U_0 comme le problème de propagation d'une ligne de niveau \mathcal{L} selon l'équation :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{1}{\tilde{g}} \mathcal{N}, \quad (4.15)$$

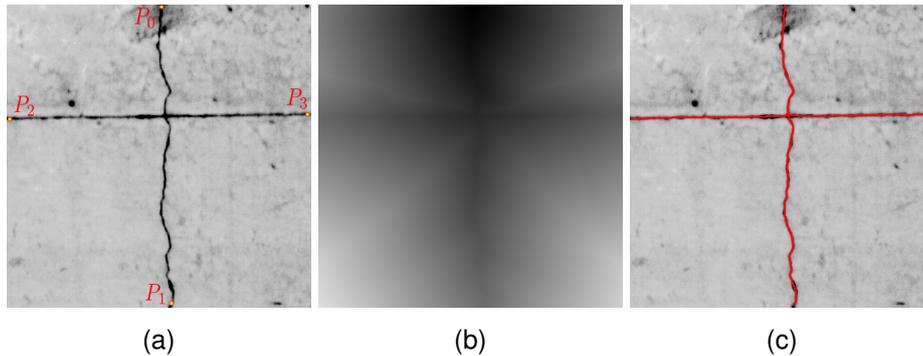
à partir d'un cercle infinitésimal centré en P_0 . On note que U_0 peut s'interpréter comme le temps d'arrivée t du front \mathcal{L} à une distance euclidienne donnée (L. COHEN et KIMMEL, 1997), ce qui permet un parallèle avec l'algorithme des *Level Sets*. En effet, U_0 jouant le rôle de fonction hôte, son évolution selon (4.9) s'écrit : $\frac{\partial U_0}{\partial t} = \frac{1}{\tilde{g}} |\nabla U_0| = \frac{\partial t}{\partial t} = 1$, et l'on retrouve l'équation eikonale. L'algorithme *Fast Marching* peut donc être vu comme une formulation stationnaire du problème d'évolution de courbe (J.A. SETHIAN, 1999), réservé au cas où la vitesse ne change pas de signe au cours du temps. À la différence de l'algorithme A^* , dont il suit l'architecture, l'algorithme *Fast Marching* ne procède pas par incrémentation locale de U_0 , mais par résolution de (4.14). Il est donc un peu plus coûteux, mais, en contrepartie, beaucoup plus précis, puisque la métrique sous-jacente est euclidienne et non de type *city-block*.

La figure 4.6 montre un exemple d'application de cet algorithme dans le domaine du génie civil (suivi de ligne de fissure dans du béton)⁴. Dans ce cas, le potentiel image, g , est directement fonction du niveau de gris.

4. Cet algorithme est mis en œuvre (CHARBONNIER, GUILLARD et CLADY, 1999; CHARBONNIER et J.-M. MOLIARD, 2002; CHARBONNIER et J. MOLIARD, 2003) dans le logiciel de traitement d'image PICTURE, distribué gratuitement par le LCPC, <http://www.lcpc.fr/fr/produits/picture.php>.

Figure 4.6

Exemple de suivi de ligne de fissure par contour actif géodésique entre plusieurs extrémités. (a) Image originale et points désignés par l'utilisateur ; (b) surface d'action minimale U_0 propagée depuis P_0 ; (c) résultats de l'extraction obtenu par descente de gradient sur l'image (b) à partir des points P_1 , P_2 et P_3 . Le contour est épaissi pour une meilleure visualisation.



4.3.1.4 Vitesse et précision

Simple à programmer et efficace, l'algorithme *Fast Marching* est très utilisé pour les applications d'analyse d'images. Dans certains domaines, cependant, une précision supérieure peut être intéressante. En effet, le schéma numérique le plus courant correspond à une discrétisation au premier ordre de l'opérateur de dérivation. Il s'ensuit que l'algorithme peine à générer de fortes courbures des lignes de niveau. Ainsi, dans le cadre de la propagation d'une distance euclidienne à partir d'un point, on observe que les premières courbes de niveau ne sont pas parfaitement circulaires. De plus, le coût \tilde{g} est considéré constant autour de chaque point de la grille. Cela signifie qu'entre deux points voisins, la vitesse d'évolution du front ne sera pas la même suivant le sens de propagation considéré. Hassouna *et al.* (HASSOUNA et FARAG, 2007), Danielsson *et al.* (DANIELSSON et LIN, 2003) ou, plus récemment, Appia et Yezzi (APPIA et YEZZI, 2013) ont proposé des schémas numériques plus précis et isotropes, demeurant efficaces d'un point de vue calculatoire.

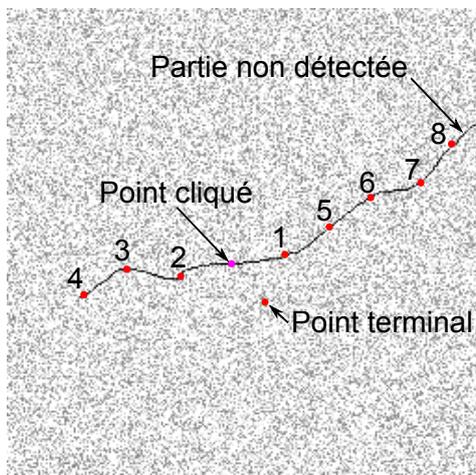
L'efficacité algorithmique est, en effet, un point primordial dans le contexte d'une application interactive. Des techniques traitant les points par groupe (*Group Marching* (S. KIM, 2001)), ou *via* une structure de gestion de priorités (YATZIV, BARTESAGHI et SAPIRO, 2006) permettent d'atteindre une complexité en $O(N)$, sans perte substantielle de précision. Enfin, une version abandonnant la propriété de causalité de la propagation au profit d'une parallélisation de l'algorithme a été proposée dans (JEONG et WHITAKER, 2008), ce qui permet son implantation efficace sur processeur graphique (COURTY, 2008).

4.3.1.5 Extension à la détection à partir d'un point unique

Récemment, Kaul *et al.* ont proposé une approche fondée sur la recherche de chemins minimaux, permettant de détecter des lignes à partir d'un seul point désigné par l'utilisateur (KAUL, YEZZI et Y. TSAI, 2012). L'idée, initialement développée dans (BENMANSOUR et L. COHEN, 2009) vient de l'observation suivante : la propagation de la distance géodésique est plus rapide (spatialement) le long des lignes suivies que dans les régions homogènes. Autrement dit, à partir d'un point situé le long de la ligne à détecter, le premier point atteint par le front à une distance euclidienne λ donnée du point de départ se situe également sur la ligne. Un rétro-parcours entre ce point et le point de départ permet la détection d'un premier linéament. La procédure se poursuit, de manière incrémentale, à partir de l'ensemble formé des deux points. Par rapport à (BENMANSOUR et L. COHEN, 2009), la méthode proposée dans (KAUL, YEZZI et Y. TSAI, 2012) résout le problème du test d'arrêt de la croissance de la courbe, en exploitant l'information de distance entre points successifs. Moyennant quelques modifications dans la gestion des tests d'arrêt, la méthode peut être étendue au cas des courbes ramifiées, ainsi qu'aux courbes fermées.

Figure 4.7

Application de la méthode de Kaul *et al.* sur une image synthétique (d'après (KAUL, YEZZI et Y. TSAI, 2012)).



La figure 4.7 montre un exemple d'application de cette méthode sur une image synthétique. Le point terminal est le premier point détecté hors de la courbe par le test proposé dans (KAUL, YEZZI et Y. TSAI, 2012). On peut constater que la longueur de la courbe détectée diffère au plus de sa longueur réelle de la valeur de λ (égale à 30 pixels, dans cet exemple). Enfin, on remarquera que, si cette méthode apporte plusieurs améliorations par rapport à la méthode initiale de Cohen et Kimmel (L. COHEN et KIMMEL, 1997) (un seul point de départ, traitement automatique des courbes fermées et des ramifications), il n'est pas évident qu'elle demeure globalement optimale.

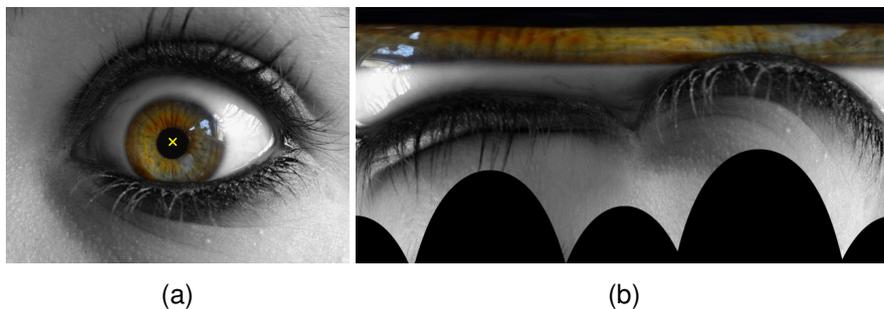
4.3.2 Cas des courbes fermées

La méthode de Cohen et Kimmel (L. COHEN et KIMMEL, 1997) peut être étendue à la segmentation de contours fermés de plusieurs autres façons que celle proposée dans (KAUL, YEZZI et Y. TSAI, 2012). Le point P_0 étant fixé, la première variante consiste à rechercher le long du contour, un point P_1 tel qu'il existe deux courbes globalement optimales le reliant à P_0 . Une méthode permettant de déterminer de tels points (qui sont des points-selles de U_0) est proposée dans (L. COHEN et KIMMEL, 1997). Cette technique est également utilisée dans (L. D. COHEN, 2001) pour mettre en place un outil de fermeture automatique de contours par groupement perceptif (*perceptual grouping*).

Une autre façon d'étendre la méthode aux courbes fermées s'inspire de recherches initialement motivées par les applications d'imagerie panoramique. Dans cette approche, l'image est « dépliée » de manière radiale puis interpolée sur une grille rectangulaire (technique du *polar unwrapping*) à partir d'un point P_{int} désigné par l'utilisateur, voir figure 4.8. On transforme ainsi la recherche d'une courbe optimale fermée entourant le point P_{int} en un problème de recherche de chemin optimal *circulaire*⁵ ou *Circular Shortest Path* (CSP) dans l'image dépliée.

Figure 4.8

(a) Image originale ; (b) image « dépliée » de manière radiale à partir du point marqué d'une croix jaune dans (a).



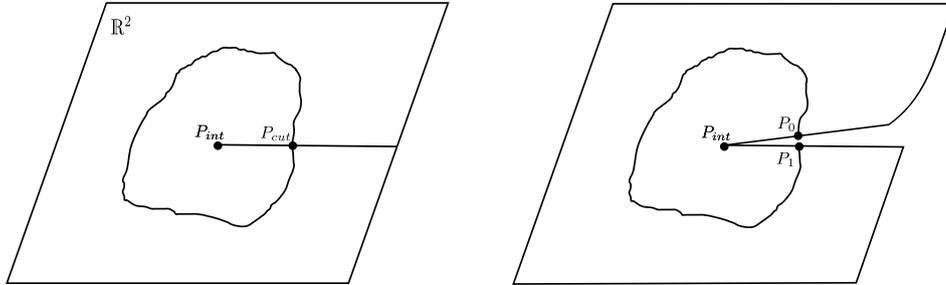
L'approche « naïve » du problème consiste à l'aborder de manière exhaustive, en recherchant l'ensemble des chemins optimaux reliant les points de la première colonne de l'image à ceux (au pixel près) de la dernière colonne. Cette approche est, évidemment, très coûteuse en temps de calcul. Dans (SUN et PALLOTTINO, 2003), Sun et Pallottino définissent trois méthodes alternatives, plus rapides mais n'assurant pas que le chemin optimal résultant soit forcément circulaire. Des techniques de type *Branch and Bound* (APPLETON et SUN, 2003) ou recherche dichotomique (DE LA GORCE et PARAGIOS, 2006) ont été proposées par la suite pour résoudre le problème de façon exacte, avec de meilleures performances.

Dans (APPLETON et TALBOT, 2005), un principe légèrement différent est adopté : il consiste à couper le plan image le long d'une demi-droite issue du point P_{int} . À

5. Un chemin circulaire (ici, horizontal) est 2π -périodique : l'ordonnée de son extrémité à gauche de l'image est égale, éventuellement au pixel près, à celle de son extrémité droite.

Figure 4.9

Découpage du plan image dans le cas d'un objet convexe (d'après (APPLETON et TALBOT, 2005)).



partir d'un point P_{cut} de cette demi-droite, des extrémités P_0 et P_1 peuvent alors être définies de part et d'autre de la découpe (figure. 4.9). Une recherche de chemin minimal par Fast Marching et rétro-parcours peut alors être effectuée à partir de ces points de départ et d'arrivée. L'avantage de cette variante est qu'elle peut s'adapter au cas où la courbe, concave, traverse plusieurs fois le plan de coupe, moyennant une représentation plus complexe, hélicoïdale, du domaine image. Tout le problème revient alors à choisir le point P_{cut} optimal de la manière la plus efficace possible. Pour cela, Appleton et Talbot proposent une adaptation de la technique de recherche arborescente de (APPLETON et SUN, 2003).

Si la méthode d'Appleton et Talbot permet de segmenter des objets non convexes, on notera qu'elle ne gère pas directement les topologies complexes. Ainsi, pour segmenter des objets à plusieurs composantes connexes, il est nécessaire de positionner un point par composante. De plus, comme la méthode originale de Cohen et Kimmel pour les courbes ouvertes, l'énergie minimisée est une énergie de type frontière. Ainsi, les algorithmes que nous venons de décrire ne permettent pas d'optimiser des fonctionnelles région, dont on sait pourtant qu'elles sont souvent plus performantes en segmentation.

4.4 Optimisation globale pour les contours actifs région

Quelle que soit la modélisation considérée, classique, géodésique ou région, la vitesse d'évolution des contours actifs n'est définie que sur la courbe en évolution. De plus, suivant son initialisation, le contour actif n'explore qu'une partie du domaine image. Ainsi, une courbe initialisée autour d'un objet comprenant un trou capture les frontières externes de l'objet mais ne peut pas segmenter le trou. Une illustration de ce problème est donnée sur la figure 4.10 (b-c), pour des images de cellules, segmentées à l'aide du modèle de Chan et Vese.

Pour remédier à ce problème d'optimum local, lié à l'impossibilité d'explorer complètement l'espace des solutions, une première tentative a été l'utilisation de la notion de dérivée topologique, issue de recherches sur l'optimisation

de forme (DELFOUR et ZOLÉSIO, 2001). Définie sur l'ensemble du domaine image, celle-ci mesure la sensibilité de l'énergie à une modification topologique des domaines étudiés, par introduction de trous. Une fois celui-ci calculé, on peut se servir du gradient topologique de la fonction d'énergie pour définir un algorithme de descente pour les contours actifs, comme dans (SHI, 2005) (en reconstruction tomographique) ou dans (HE et OSHER, 2007) (en segmentation, selon le modèle de Chan et Vese). Cependant, l'emploi d'un algorithme de *Level sets*, où la vitesse n'est en principe définie que le long de l'interface, nécessite une adaptation (BURGER, HACKL et RING, 2004). Ces premières tentatives n'ont, à notre connaissance, pas eu de suite, ces méthodes ayant rapidement été dépassées par l'essor des techniques de *convexification*.

Il s'agit de techniques variationnelles, issues de recherches sur le débruitage d'images binaires (NIKOLOVA, 2004), d'études théoriques sur la régularisation par variation totale (RUDIN, OSHER et FATEMI, 1992 ; CHAN et ESEDOĞLU, 2005) et de travaux sur l'optimisation convexe (CHAMBOLLE, 2004). Ces investigations ont débouché sur des méthodes rapides, précises et assurant dans certains cas l'optimalité globale pour la segmentation à deux classes à partir de fonctionnelles orientées région (NIKOLOVA, ESEDOĞLU et CHAN, 2006 ; BRESSON et al., 2007). Nous nous focaliserons ici sur les approches variationnelles continues, mais il existe des méthodes d'un niveau équivalent dans le formalisme discret (ces travaux ont, d'ailleurs, bien souvent inspiré le développement des méthodes continues). C'est, en particulier, le cas des modèles de type *max flow - min cut*, associés aux algorithmes de découpe de graphe ou *graph cuts* (BOYKOV, VEKSLER et ZABIH, 2001 ; APPLETON et TALBOT, 2006).

4.4.1 Relaxation convexe : principe général

Reprenons le problème de segmentation par contour actif région, selon la fonctionnelle de Chan et Vese (§ 4.2.3). On considère que l'image est une fonction binaire, formée d'une région intérieure Ω_{int} , d'intensité μ_{int} , et d'une région extérieure $\Omega_{ext} = \Omega \setminus \Omega_{int}$, d'intensité μ_{ext} , séparées par une frontière Γ , de sorte que :

$$I(\mathbf{x}) = \mu_{int} \cdot \chi_{\Omega_{int}}(\mathbf{x}) + \mu_{ext} \cdot \chi_{\Omega_{ext}}(\mathbf{x}), \quad (4.16)$$

où χ_{Σ} représente la fonction caractéristique, binaire, de la région Σ . Le problème consiste à trouver la courbe qui minimise la fonctionnelle :

$$E_{CV}(\Omega_{int}) = \int_{\Omega_{int}} (I - \mu_{int})^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega \setminus \Omega_{int}} (I - \mu_{ext})^2 d\mathbf{x} + \nu Per(\Omega_{int}), \quad (4.17)$$

où $Per(\Omega_{int}) = |\Gamma|$ est la longueur de l'interface entre les régions intérieure et extérieure. On sait que ce problème n'a pas de solution unique car l'ensemble des régions binaires n'est pas un ensemble convexe. Toute les techniques d'optimisation, en particulier, celle des *level-sets*, conduisent donc à des minima locaux. On montre que l'équation d'évolution de la courbe, éq. (4.11), se traduit en termes d'ensembles de niveaux par :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \delta(\psi) \left\{ ((I - \mu_{int})^2 - (I - \mu_{ext})^2) + \nu div \left(\frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|} \right) \right\}. \quad (4.18)$$

où, en général, on remplace la fonction Dirac δ , par une fonction continue, δ_ϵ de façon à régulariser le schéma numérique. Comme cette dernière est à support étendu, des changements de signe de ψ peuvent apparaître plus ou moins loin de la courbe. Ceci permet, par exemple la capture de trous dans les objets à l'aide d'une courbe initialisée à l'extérieur de ceux-ci. Cette propriété va dans le sens d'une exploration plus complète du domaine image, nécessaire pour une optimisation globale. On peut pousser plus loin cette idée, en remarquant que, puisque la fonction δ_ϵ est positive, la supprimer ne change pas l'ensemble des points stationnaires de (4.18) et l'on peut donc appliquer, sur l'ensemble des courbes de niveau :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left\{ ((I - \mu_{int})^2 - (I - \mu_{ext})^2) + \nu \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|} \right) \right\}. \quad (4.19)$$

Or, cette équation d'évolution correspond à une minimisation par descente de gradient de :

$$E_{CEN}(\psi) = \int_{\Omega} |\nabla \psi| + \lambda \int_{\Omega} \{(\mu_{int} - I(\mathbf{x}))^2 - (\mu_{ext} - I(\mathbf{x}))^2\} \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (4.20)$$

qui est une fonctionnelle convexe par rapport à ψ . Cependant, on peut noter que cette énergie est homogène de degré 1 (elle est linéaire en ψ : $E_{CEN}(\alpha \cdot \psi) = \alpha \cdot E_{CEN}(\psi)$) et n'a donc pas de minimiseur. Une rapide étude de l'équation d'évolution (4.19) associée permet de le comprendre⁶. Si on discrétise cette équation en temps, l'évolution de la fonction hôte ψ est donnée par :

$$\psi^{t+1} = \psi^t + \delta t \left\{ ((I - \mu_{int})^2 - (I - \mu_{ext})^2) + \nu \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \psi^t}{|\nabla \psi^t|} \right) \right\}. \quad (4.21)$$

Considérons le cas idéal où la courbe est parfaitement positionnée sur les frontières de l'objet. On a, par convention, $\psi(\mathbf{x}) < 0$ pour un point \mathbf{x} appartenant à Ω_{int} . Si l'image est effectivement binaire, on a également $I(\mathbf{x}) \simeq \mu_{int}$. Autrement dit, si l'on omet pour simplifier le terme de courbure, l'incrément appliqué à ψ est négatif. De même, pour un point \mathbf{x} situé à l'extérieur de l'objet, on a à la fois $\psi(\mathbf{x}) > 0$ et $I(\mathbf{x}) \simeq \mu_{ext}$ et l'incrément est positif. En d'autres termes, l'application répétée de (4.21) aura pour effet de rendre toujours plus négatives les valeurs de ψ à l'intérieur de l'objet et plus positives les valeurs de ψ à l'extérieur de celui-ci. Donc, ψ va tendre vers une carte binaire à valeurs $\pm\infty$ selon l'appartenance à la région Ω_{int} . Cet écueil peut être évité de manière simple, en bornant la fonction ψ : on choisit donc de remplacer ψ par une fonction $0 \leq u(\mathbf{x}) \leq 1$ et on considère (NIKOLOVA, ESEDOĞLU et CHAN, 2006) la minimisation de la fonctionnelle suivante :

$$E_{CEN}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| + \lambda \int_{\Omega} \{(\mu_{int} - I(\mathbf{x}))^2 - (\mu_{ext} - I(\mathbf{x}))^2\} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (4.22)$$

sous la contrainte $0 \leq u(\mathbf{x}) \leq 1$.

On peut remarquer que non seulement la fonctionnelle (4.22) est convexe, mais que u appartient également à un espace convexe, plus précisément l'ensemble

⁶. Pour le justifier, on peut aussi remarquer qu'il existe une infinité de représentations d'une courbe par un ensemble de niveaux (GOLDSTEIN, BRESSON et OSHER, 2009a)

Optimisation de formes en sciences de l'ingénieur

des fonctions à variations bornées sur $[0, 1]$. L'optimisation de E_{CEN} peut donc être conduite de manière globale. On remarque aussi que la convexité a été obtenue en remplaçant la recherche de la région Ω_{int} , que l'on peut définir par sa fonction caractéristique binaire, par celle d'une fonction continue sur $[0, 1]$, donc en relâchant la contrainte de binarité. C'est ce qui donne le nom de *relaxation convexe*⁷ à cette approche.

On montre alors, et c'est sans doute le résultat le plus important de (NIKOLOVA, ESEDOĞLU et CHAN, 2006), que pour $\mu_{int}, \mu_{ext} \in \mathbb{R}$ fixés, si u^* (tel que $u^*(\mathbf{x}) \in [0, 1]$) minimise E_{CEN} , alors $\Omega_{int}(\mu) = \{\mathbf{x} : u^*(\mathbf{x}) \geq \mu\}$ est un minimiseur global de l'énergie (4.17) pour presque tout $\mu \in [0, 1]$.

La preuve de ce théorème (NIKOLOVA, ESEDOĞLU et CHAN, 2006), inspirée de travaux plus anciens (STRANG, 1982; STRANG, 1983), utilise notamment la formule de la co-aire, qui relie la variation totale de la fonction u à l'intégrale des longueurs de ses courbes de niveau :

$$\int_{\Omega} |\nabla u| = \int_0^1 Per(\{\mathbf{x} : u(\mathbf{x}) > \mu\}) d\mu, \quad (4.23)$$

et l'identité (où $\chi_{[a,b]}(\cdot)$ est la fonction caractéristique 1D de l'intervalle $[a, b]$) :

$$u(\mathbf{x}) = \int_0^1 \chi_{[0, u(\mathbf{x})]}(\mu) d\mu, \quad (4.24)$$

pour obtenir :

$$E_{CEN}(u) = \int_0^1 E_{CV}(\Omega_{int}(\mu)) d\mu - C, \quad (4.25)$$

où C est une constante. Il s'ensuit que si u^* est un minimiseur de E_{CEN} , alors $\Omega_{int}(\mu)$ doit être un minimiseur de E_{CV} pour toutes les valeurs de μ , à un ensemble de mesure nulle près. Notons que ce théorème a été étendu pour toutes les valeurs de μ , pour $\mu \in [0, 1]$ dans (BERKELS, 2009).

En vertu de ce théorème de seuillage, le principe général de la méthode d'optimisation globale par relaxation convexe consiste à minimiser (4.22) sous contrainte $u^*(\mathbf{x}) \in [0, 1]$, puis à seuiller le résultat pour obtenir la partition souhaitée. On note que n'importe quelle valeur de seuil peut être utilisée, d'après le théorème, ce qui est cohérent avec le fait que le schéma numérique associé a un effet binarisant, comme nous l'avons fait remarquer : en pratique les valeurs de u^* sont soit très proches de 0, soit très proches de 1 (NIKOLOVA, ESEDOĞLU et CHAN, 2006).

4.4.2 Algorithmes d'optimisation

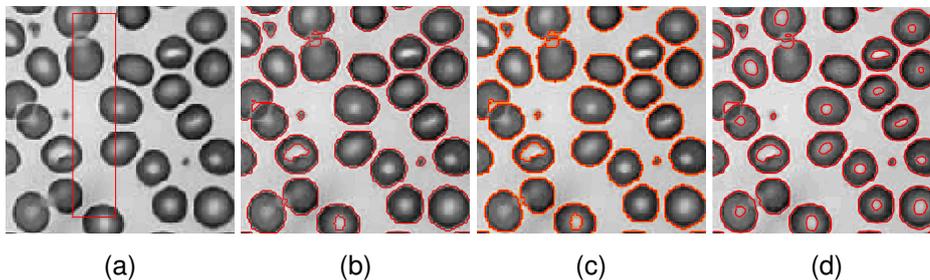
Le point clef de la méthode est la minimisation sous contrainte de (4.22). Une descente de gradient est possible. C'est l'approche initialement retenue dans (NIKOLOVA, ESEDOĞLU et CHAN, 2006). Le problème est tout d'abord

⁷. Cette notion est également exploitée, mais de manière différente, dans (CREMERS, SCHMIDT et BARTHEL, 2008).

transformé en remplaçant la contrainte $u(x) \in [0, 1]$ par l'utilisation d'un terme supplémentaire faisant intervenir une fonction « vallée », nulle sur $[0, 1]$ et linéaire sur les bords de cet intervalle. Toutefois, le terme L^1 qui apparaît dans le critère E_{CEN} nécessite une régularisation et l'utilisation d'un pas de temps faible (BRESSION et al., 2007). De plus, les méthodes régularisées ont le défaut de lisser les frontières dans l'image u^* , ce qui rend la segmentation sensible au choix du seuil. Des méthodes plus rapides et plus précises, fondées sur des formulations duales développées notamment pour les décompositions d'image en structure et texture (voir par exemple (CHAMBOLLE, 2004) ou (AUJOL et CHAMBOLLE, 2005)), peuvent être appliquées pour accélérer l'optimisation.

Figure 4.10

Initialisation pour les algorithmes Level Sets (a) et résultats de segmentation par contour actif orienté région (modèle de Chan et Vese) d'une image 230×230 tirée de (YEZZI, A. TSAI et WILLSKY, 1999) (b,c,d). Algorithme levels sets (OSHER et J.A. SETHIAN, 1988), implantation C+Matlab (A. Foulonneau) : temps de calcul environ 12 secondes (b). Algorithme Level Sets rapides de Shi et Karl (SHI et KARL, 2005), implantation Matlab (G. Gaullier) : temps de calcul environ 4s (c). Algorithme de Goldstein *et al.* (GOLDSTEIN, BRESSION et OSHER, 2009a), implantation C+Matlab (disponible sur <http://www.math.ucla.edu/~xbresson/code.html>) : temps de calcul environ 0,04s (d). Moyennes des régions : $\mu_{int} = 202$, $\mu_{ext} = 87$ pour (b,c) et $\mu_{int} = 205$, $\mu_{ext} = 86$ (d).



Tout récemment (GOLDSTEIN, BRESSION et OSHER, 2009a) la méthode dite Split-Bregman a permis d'atteindre des temps de calcul comparables à ceux des *Graph Cuts*. Nous avons, à titre d'exemple, appliqué cette méthode à une image de cellule (figure 4.10). Les temps de calcul sont largement inférieurs à ceux des algorithmes *Level Sets*, même accélérés, que nous utilisons habituellement. Par ailleurs, on constate que les zones blanches à l'intérieur de certaines cellules sont correctement segmentées, alors que les algorithmes *Level Sets* ne les capturent qu'à proximité de la courbe initiale.

4.4.3 Extensions

La méthode de Chan *et al.* a été adaptée dans (BRESSION et al., 2007) en utilisant une norme pondérée de ∇u en lieu et place de la norme L^1 , reliant ainsi les approches de Chan et Vese et de Mumford et Shah aux contours actifs

Optimisation de formes en sciences de l'ingénieur

géodésiques. Par ailleurs, l'approche peut s'étendre à toute fonctionnelle de la forme :

$$E(u) = \int_{\Gamma} g(\mathbf{x}(s)) ds + \lambda \int_{\Omega_{int}} r_{int}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \lambda \int_{\Omega \setminus \Omega_{int}} r_{ext}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (4.26)$$

Ainsi, elle est appliquée dans (HOUHOU, J. THIRAN et BRESSON, 2008) à un critère région de dissimilarité (maximisation de la J-divergence) et dans (NI et al., 2009), à un critère région d'homogénéité fondé sur l'utilisation d'histogrammes locaux. Dans (MORY et ARDON, 2007), une approche très voisine, appelée *fuzzy region competition*, est proposée. Elle consiste à remplacer dans (4.26) la région Ω_{int} par une fonction d'appartenance *floue* u , non binaire. On obtient ainsi une expression convexe, très proche de (4.22). Dans (MORY, ARDON et J.-P. THIRAN, 2007), ce principe est appliqué à des fonctionnelles fondées sur des modèles non paramétriques, par noyaux de Parzen, des densités de probabilité globales des régions. Le modèle est ensuite adapté à des mesures plus locales.

L'extension de ce type de méthodes au cas multi-phases est un sujet difficile et toujours d'actualité. La version proposée récemment dans (POCK et al., 2009) semble s'approcher de l'optimum global. L'introduction de contraintes de forme dans le formalisme de la relaxation convexe fait également l'objet de travaux de recherche (WERLBERGER et al., 2009).

4.4.4 Limitations

Il est très important de noter que les approches décrites précédemment ne sont globales que vis-à-vis de l'optimisation de forme. En réalité, le modèle de Chan et Vese comporte trois inconnues, puisque les moyennes (ou, dans la formulation générale, les caractéristiques des régions) ne sont *a priori* pas connues. L'approche usuelle, dans la lignée de ce qui se pratiquait avec l'algorithme des *level sets*, est un schéma d'optimisation alternant ajustement de forme et estimation des paramètres. Malheureusement, on n'a plus aucune garantie qu'une solution globale puisse être atteinte par ce type de schéma! Plusieurs exemples où deux solutions différentes sont obtenus à partir de deux initialisations différentes est montré dans (BROWN, CHAN et BRESSON, 2011). Curieusement, ce problème a très peu été exploré ces dernières années. On peut citer les travaux de Strandmark *et al.* (STRANDMARK, KAHL et OVERGAARD, 2009) incluant un algorithme de type *branch and bound* et, plus récemment, ceux de Brown *et al.* (BROWN, CHAN et BRESSON, 2011). Ces derniers exploitent une technique de relaxation convexe proposée dans (GOLDSTEIN, BRESSON et OSHER, 2009b) pour estimer simultanément u et les paramètres des régions. L'optimalité globale n'est pas assurée, mais un critère permettant de vérifier de combien la solution calculée s'en éloigne est proposé.

4.5 Conclusion

Les contours actifs sont une catégorie très populaire de modèles déformables et ont généré une littérature abondante et riche au cours des 25 dernières années. Ceci s'explique, d'une part, par l'aspect très générique de leur principe, qui les rend adaptés à un grand nombre d'applications. D'autre part, la difficulté du problème abordé et les relatives faiblesses des premiers modèles proposés ont également motivé un grand nombre de recherches. Enfin, ces approches sont nourries de travaux menés dans disciplines variées comme la physique, les méthodes numériques, la géométrie, les statistiques, ou encore la théorie de l'optimisation.

Il est, évidemment, impossible de dresser un état de l'art exhaustif dans un domaine aussi foisonnant et, dans la première partie de ce chapitre, nous nous sommes limités à un tour d'horizon des approches les plus connues. On peut toutefois remarquer que, parmi les principales problématiques rencontrées et les variantes ou améliorations proposées, la question de l'optimalité des solutions estimées est un sujet central, depuis l'origine de ces méthodes.

En effet, selon un canevas usuel en reconnaissance des formes, les contours actifs reposent sur la résolution d'un problème d'optimisation de paramètres ou, plus généralement, de formes. Ce type de problème est connu pour sa difficulté, liée notamment à la présence d'optima locaux. Celle-ci peut être due à la non-convexité de l'espace dans lequel sont recherchées les solutions (par exemple, l'espace des fonctions caractéristiques binaires) ou bien à la non-convexité de la fonctionnelle minimisée, voire même, des deux aspects combinés. Dans ce chapitre, nous avons focalisé notre attention sur les principales approches ayant abouti à des outils aujourd'hui opérationnels. Plus précisément, nous avons présenté les techniques basées sur la recherche de chemins minimaux, qui offrent des outils optimaux pour les contours actifs orientés frontière, avec un certain besoin d'interactivité avec l'opérateur. Nous avons ensuite expliqué le principe des techniques de relaxation convexe, qui permettent d'optimiser certaines fonctionnelles orientées région. Ces méthodes, souvent mises en concurrence avec les techniques de *graph cuts*, qui représentent leur pendant dans un formalisme discret, ont connu un essor important ces dernières années. Leur succès est dû à une certaine généralité du formalisme proposé, à la présence de résultats théoriques concernant leur optimalité. Il tient, surtout, à la disponibilité d'algorithmes d'optimisation efficaces fondés notamment sur la notion de dualité. À l'heure actuelle, les approches fondées sur l'optimisation convexe sont en pleine expansion dans le domaine de la segmentation.

Si l'on fait le bilan de ces méthodes, on se rend compte que l'on est progressivement passé au cours des années 1990 de représentations explicites, sous forme de courbes, à des représentations implicites des formes, comme les ensemble de niveaux ou, depuis le milieu des années 2000, les fonctions caractéristiques. D'un problème d'optimisation de courbe, on se ramène aujourd'hui à l'optimisation d'une fonction bidimensionnelle et l'on retrouve des fonctionnelles très proches de critères définis dans le domaine de la restauration d'images bruitées. En fait, segmentation et restauration sont intimement liées,

Optimisation de formes en sciences de l'ingénieur

et les travaux de Mumford et Shah (MUMFORD et SHAH, 1989) continuent d'inspirer ces deux domaines de recherches. En revenir à un problème de segmentation pourrait passer pour un retour en arrière : dans le cas discret, par exemple, on retrouve des fonctionnelles bien connues dans le domaine des champs Markoviens, très en vogue à partir de la fin des années 1980. Ceci étant, les outils théoriques et pratiques avec lesquels on revisite aujourd'hui ces méthodes ouvrent de nouvelles possibilités et permettent de définir des outils de segmentation innovants et efficaces.

Nous l'avons vu, les modèles et les algorithmes ont beaucoup progressé au cours de ces 20 ans et on dispose d'un panel d'exemples de fonctionnelles adaptées à des situations variées, et de plusieurs techniques optimales de segmentation. Les besoins en recherche méthodologique sont cependant loin d'être taris. En effet, tous les problèmes ne sont pas résolus, loin de là. Par exemple, nous avons noté que dans le cas des modèles région binaires, l'optimalité n'était assurée que par rapport à la forme, et non par rapport à l'ensemble « forme plus paramètres », ce qui est rarement souligné dans les publications. Très peu de travaux ont abordé cette question. Un autre exemple est celui de la segmentation globale simultanée de plusieurs objets, et l'incorporation de contraintes de haut niveau portant sur la forme ou la topologie des objets. Dans ces domaines, bien des progrès restent à faire pour développer des modèles plus sophistiqués, en meilleure adéquation avec l'extrême variété des situations rencontrées dans les applications pratiques.

Bibliographie

- [AB98] G. AUBERT et L. BLANC-FÉRAUD. *An elementary proof of the equivalence between 2D and 3D classical snakes and geodesic active contours*. Rapport de Recherche RR-3340. Sophia Antipolis : INRIA, jan. 1998.
- [AC05] J.F. AUJOL et A. CHAMBOLLE. « Dual Norms and Image Decomposition Models ». In : *International Journal of Computer Vision* 63.1 (2005), p. 85-104.
- [AS03] B. APPLETON et C. SUN. « Circular shortest paths by Branch and Bound ». In : *Pattern Recognition* 36.11 (2003), p. 2513-2520.
- [AT05] B. APPLETON et H. TALBOT. « Globally Optimal Geodesic Active Contours ». In : *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 23.1 (2005), p. 67-86.
- [AT06] B. APPLETON et H. TALBOT. « Globally Minimal Surfaces by Continuous Maximal Flows ». In : *IEEE Transactions On Pattern Analysis And Machine Intelligence* 28.1 (2006), p. 106-118.
- [Aub+03] G. AUBERT, M. BARLAUD et al. « Image segmentation using active contours : calculus of variations or shape gradients? » In : *SIAM, Journal on Applied Mathematics* 63.6 (sept. 2003). Egalement RR-INRIA 4483, juin 2002, p. 2128-2154.
- [AY13] V. APPIA et A. YEZZI. « Symmetric Fast Marching schemes for better numerical isotropy ». In : *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 35.9 (sept. 2013), p. 2298-2304.
- [BC09a] F. BENMANSOUR et L. COHEN. « Fast object segmentation by growing minimal paths from a single point on 2D or 3D images ». In : *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 33.2 (fév. 2009), p. 209-221.
- [BC09b] T. BROX et D. CREMERS. « On local region models and a statistical interpretation of the piecewise smooth Mumford-Shah functional ». In : *International Journal of Computer Vision* 84.2 (août 2009), p. 184-193.
- [BCB11] E. BROWN, T. CHAN et X. BRESSON. « Completely convex formulation of the Chan-Vese image segmentation model ». In : *International Journal of Computer Vision* (2011). A paraître. Accessible en ligne : <http://www.springerlink.com>.

Optimisation de formes en sciences de l'ingénieur

- [Ber09] B. BERKELS. « An unconstrained multiphase thresholding approach for image segmentation ». In : *Proceedings of the Second International Conference on Scale Space Methods and Variational Methods in Computer Vision (SSVM 2009)*. T. 5567. Lecture Notes in Computer Science. 2009, p. 26-37.
- [Ber91] M.O. BERGER. « Les contours actifs : modélisation, comportement, convergence ». Thèse de doctorat. Nancy : INPL, 1991.
- [BHR04] M. BURGER, B. HACKL et W. RING. « Incorporating topological derivatives into level set methods ». In : *Journal of Computational Physics* 194 (2004), p. 344-362.
- [BHU00] P. BRIGGER, J. HOEG et M. UNSER. « B-Spline Snakes : A Flexible Tool for Parametric Contour Detection ». In : *IEEE Transactions on Image Processing* 9.9 (sept. 2000), p. 1484-1496.
- [Bre+07] X. BRESSON et al. « Fast Global Minimization of the Active Contour/Snake Model ». In : *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 28.2 (2007), p. 151-167.
- [BVZ01] Y. BOYKOV, O. VEKSLER et R. ZABIH. « Fast Approximate Energy Minimization via Graph Cuts ». In : *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 23.11 (nov. 2001), p. 1222-1239.
- [Cas+93] V. CASELLES, F. CATTÉ et al. « A geometric model for active contours in image processing ». In : *Numerische Mathematik* 66 (oct. 1993), p. 1-31.
- [CBA93] L. COHEN, E. BARDINET et N. AYACHE. *Surface reconstruction using active contour models*. Rapport de Recherche RR-1824. Sophia Antipolis : INRIA, fév. 1993.
- [CC93] L. COHEN et I. COHEN. « Finite-Element Methods for Active Contour Models and Balloons for 2-D and 3-D Images ». In : *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 15.11 (nov. 1993), p. 1131-1147.
- [CC96] P. CHARBONNIER et O. CUISENAIRE. *Une étude des contours actifs : modèles classique, géométrique et géodésique*. Rapp. tech. 163. Laboratoire TELE, Place du Levant 2, 1348 LOUVAIN-LA-NEUVE (Belgique) : Université Catholique de Louvain, juil. 1996.
- [CE05] T. CHAN et S. ESEDOĞLU. « Aspects of total variation regularized L^1 function approximation ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 65.5 (2005), p. 1817-1837.
- [CGC99] P. CHARBONNIER, Y. GUILLARD et X. CLADY. *Détection automatique de fissures sur ouvrages d'art par analyse d'images*. Rapp. tech. FAER 283138. LCPC, avr. 1999.
- [Cha04] A. CHAMBOLLE. « An algorithm for total variation minimization and applications ». In : *Journal of mathematical imaging and vision* 20 (2004), p. 89-97.
- [Cha09] P. CHARBONNIER. « Modèles de forme et d'apparence en traitement d'images ». Habilitation à Diriger des Recherches. Université de Strasbourg, sept. 2009.

- [Cha12] P. CHARBONNIER. *Optimisation globale pour les contours actifs*. Rapport bibliographique OR 11W101. IFSTTAR, mar. 2012.
- [CK97] L. COHEN et R. KIMMEL. « Global Minimum for Active Contour Models : A Minimal Path Approach ». In : *International Journal of Computer Vision* 24.1 (1997), p. 57-78.
- [CKS97] V. CASELLES, R. KIMMEL et G. SAPIRO. « Geodesic active contours ». In : *International Journal of Computer Vision* 22.1 (fév. 1997), p. 61-79.
- [CM02] P. CHARBONNIER et J.-M. MOLIARD. *Implantation dans PICTURE d'un algorithme de segmentation d'images par minimisation de distance géodésique pour le suivi de bords ou de fissures*. Rapp. tech. FAER 282410, OR 11A025. LCPC, fév. 2002.
- [CM03] P. CHARBONNIER et J.M. MOLIARD. « Calculs de chemins minimaux, suivi de fissures et autres applications ». In : *Journées des Sciences de l'Ingénieur du réseau des laboratoires des Ponts et Chaussées*. Sous la dir. de LCPC. Actes des journées scientifiques du LCPC. Dourdan, France, déc. 2003, p. 201-206.
- [Coh01] Laurent D. COHEN. « Multiple Contour Finding and Perceptual Grouping using Minimal Paths ». In : *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 14.3 (mai 2001), p. 225-236.
- [Coh91] L. COHEN. « On active contour models and balloons ». In : *Computer Vision, Graphics, and Image Processing. Image Understanding* 53.2 (1991), p. 211-218.
- [Cou08] N . COURTY. *GPUMarching - A fast GPU-Based Eikonal Equation Solver*.
<http://www-valoria.univ-ubs.fr/Nicolas.Courty/GPUMarching/GPUMarching.html>.
Accessible le 30 mars 2012. 2008.
- [CRB99] C. CHESNAUD, P. RÉFRÉGIER et V. BOULET. « Statistical region snake based segmentation adapted to different physical noise models ». In : *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 21.11 (nov. 1999), p. 1145-1157.
- [CRD07] D. CREMERS, M. ROUSSON et R. DERICHE. « A Review of Statistical Approaches to Level Set Segmentation : Integrating Color, Texture, Motion and Shape ». In : *International Journal of Computer Vision* 72.2 (2007), p. 195-215.
- [CSB08] D. CREMERS, F. SCHMIDT et F. BARTHEL. « Shape Priors in Variational Image Segmentation : Convexity, Lipschitz Continuity and Globally Optimal Solutions ». In : *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. Anchorage, Alaska, juin 2008.
- [CV01] T. CHAN et L. VESE. « Active contours without edges ». In : *IEEE Transactions on Image processing* 10.2 (fév. 2001), p. 266-277.
- [Dij59] E. DIJKSTRA. « A note on two problems in connection with graphs ». In : *Numerische Mathematic* 1 (1959), p. 269-271.

Optimisation de formes en sciences de l'ingénieur

- [DKY95] R. DURIKOVIC, K. KANEDA et H. YAMASHITA. « Dynamic contour : a texture approach and contour operations ». In : *The Visual Computer* 11.6 (1995), p. 277-289.
- [DL03] P. DANIELSSON et Q. LIN. « A modified fast marching method ». In : *Proceedings of the 13th Scandinavian conference on Image analysis. SCIA'03*. Halmstad, Suède : Springer-Verlag, 2003, p. 1154-1161.
- [DM00] H. DELINGETTE et J. MONTAGNAT. *Topology and Shape Constraints on Parametric Active Contours*. Rapport de Recherche RR-3880. Sophia Antipolis : INRIA, 2000.
- [dP06] M. DE LA GORCE et N. PARAGIOS. « Fast Dichotomic Multiple Search Algorithm for Shortest Circular Path ». In : *Proc. 18th International Conference on Pattern Recognition (ICPR'06)*. T. 2. 2006, p. 403-406.
- [Duf00] F. DUFRESNOIS. « Étude d'un modèle déformable de Fourier pour la segmentation et le suivi d'objets 2D et 3D ». In : *Traitement du Signal* 17.2 (2000), p. 153-178.
- [DZ01] M.C. DELFOUR et J.P. ZOLÉSIO. *Shape and geometries : analysis, differential calculus and optimization*. Advances in design and control. SIAM, 2001.
- [Fal+98] A. FALCÃO et al. « User-steered image segmentation paradigms : Live-wire and live-lane ». In : *Graphical Models and Image Processing* 60.4 (juil. 1998), p. 233-260.
- [FL90] P. FUA et Y. LECLERC. « Model Driven Edge Detection ». In : *Machine Vision and Applications* 3 (1990), p. 45-56.
- [Fom97] S. FOMEL. *A variational formulation of the fast marching eikonal solver*. Rapport Technique 95. Université de Standford : Stanford Exploration Project, sept. 1997.
- [Fou04] A. FOULONNEAU. « Une contribution à l'introduction de contraintes géométriques dans les contours actifs orientés région ». Thèse de doctorat. Strasbourg : Université Louis Pasteur - Strasbourg I, déc. 2004.
- [GBO09a] T. GOLDSTEIN, X. BRESSON et S. OSHER. *Geometric Applications of the Split Bregman Method : Segmentation and Surface Reconstruction*. Rapport de Recherche CAM09-06. UCLA, fév. 2009.
- [GBO09b] T. GOLDSTEIN, X. BRESSON et S. OSHER. *Global minimization of Markov random fields with applications to optical flow*. Rapport de Recherche CAM09-77. UCLA, fév. 2009.
- [GN97] S. GUNN et M. NIXON. « A Robust Snake Implementation : A Dual Active Contour ». In : *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 19.1 (1997), p. 63-68.
- [Hel+96] J. HELMSEN et al. « Two new methods for simulating photolithography development in 3D ». In : *SPIE 2726*. 1996, p. 253-261.

- [HF07] M. HASSOUNA et A. FARAG. « Multistencils Fast Marching Methods : A highly accurate solution to the Eikonal equation on cartesian domains ». In : *IEEE Transactions On Pattern Analysis And Machine Intelligence* 29.9 (sept. 2007), p. 1563-1574.
- [HO07] L. HE et S. OSHER. « Solving the Chan-Vese Model by a Multiphase Level Set Algorithm Based on the Topological Derivative ». In : *Scale Space and Variational Methods in Computer Vision*. Sous la dir. de F. SGALLARI, A. MURLI et N. PARAGIOS. T. 4485. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin / Heidelberg, 2007, p. 777-788.
- [HTB08] N. HOUHOU, J.P. THIRAN et X. BRESSON. « Fast texture segmentation model based on the shape operator and active contour ». In : *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'2008)*. Anchorage, USA, 2008, p. 1-8.
- [JW08] W-K. JEONG et R. WHITAKER. « A Fast Iterative Method for Eikonal Equations ». In : *SIAM Journal of Scientific Computing* 30.5 (juil. 2008), p. 2512-2534.
- [Kic+96] S. KICHENASSAMY et al. « Conformal curvature flows : From phase transitions to active vision ». In : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 134 (sept. 1996), p. 275-301.
- [Kim+05] J. KIM et al. « A nonparametric statistical method for image segmentation using information theory and curve evolution ». In : *IEEE Transactions on Image Processing* 14.10 (oct. 2005), p. 1486-1502.
- [Kim01] S. KIM. « An O(N) level set method for eikonal equation ». In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 22.6 (2001), p. 2178-2193.
- [KWT88] M. KASS, A. WITKIN et D. TERZOPOULOS. « Snakes : active contour models ». In : *International Journal of Computer Vision* 1.4 (jan. 1988), p. 321-331.
- [KYT12] V. KAUL, A. YEZZI et Y. TSAI. « Detecting curves with unknown endpoints and arbitrary topology using minimal paths ». In : *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 34.10 (oct. 2012), p. 1952-1965.
- [LHC96] B. LEROY, I. HERLIN et L. COHEN. « Multi-resolution algorithms for active contour models ». In : *Proc. 12th International Conference on Analysis and Optimization of Systems : Images, Wavelets and PDE's (ICAOS'96)*. T. 219/1996. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Paris : Springer, juin 1996, p. 58-65.
- [Li+08] C. LI et al. « Minimization of Region-Scalable Fitting Energy for Image Segmentation ». In : *IEEE Transactions on Image Processing* 17.10 (oct. 2008), p. 1940-1949.
- [LT08] S. LANKTON et A. TANNENBAUM. « Localizing region-based active contours ». In : *IEEE Transactions on Image Processing* 17.11 (nov. 2008), p. 1-11.

Optimisation de formes en sciences de l'ingénieur

- [MA07] B. MORY et R. ARDON. « Fuzzy region competition : a convex two-phase segmentation framework ». In : *Proceedings of the 1st international conference on Scale space and variational methods in computer vision*. SSVM'07. Ischia, Italie, 2007, p. 214-226.
- [MAT07] B. MORY, R. ARDON et J.-P. THIRAN. « Variational Segmentation using Fuzzy Region Competition and Local Non-Parametric Probability Density Functions ». In : *IEEE 11th International Conference on Computer Vision, ICCV*. Rio de Janeiro, Brésil, oct. 2007, p. 1-8.
- [MB95] E. MORTENSEN et W. BARRETT. « Intelligent Scissors for Image Composition ». In : *Proc. 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques (SIGGRAPH '95)*. Los Angeles, USA, août 1995, p. 191-198.
- [MB99] E. MORTENSEN et W. BARRETT. « Toboggan-Based Intelligent Scissors with a Four-Parameter Edge Model ». In : *Proc. IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. T. 2. Ft. Collins, USA, juin 1999, p. 2452-2458.
- [MS89] D. MUMFORD et J. SHAH. « Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems ». In : *Com. pure & Appli. Math.* 42.5 (1989), p. 577-685.
- [MSM90] S. MENET, P. SAINT-MARC et G. MEDIONI. « B-snakes : Implementation and application to stereo ». In : *Proc. 3rd International Conference on Computer Vision (ICCV'90)*. 1990, p. 720-726.
- [MSV95] R. MALLADI, J. SETHIAN et B. VEMURI. « Shape modeling with front propagation : a level set approach ». In : *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 17.2 (fév. 1995), p. 158-175.
- [MT95] T. MCINERNEY et D. TERZOPOULOS. « Topologically adaptable snakes ». In : *Proc. 5th International Conference on Computer Vision (ICCV'95)*. Cambridge, USA, juin 1995, p. 840-845.
- [NEC06] M. NIKOLOVA, S. ESEDOĞLU et T. CHAN. « Algorithms for Finding Global Minimizers of Image Segmentation and Denoising Models ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 66.5 (2006). (UCLA CAM Report 04-54, 2004), p. 1632-1648.
- [Ni+09] K. NI et al. « Local Histogram Based Segmentation Using the Wasserstein Distance ». In : *International Journal of Computer Vision* 84.1 (août 2009), p. 97-111.
- [Nik04] M. NIKOLOVA. « A variational approach to remove outliers and impulse noise ». In : *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 20 (2004), p. 99-120.
- [OF03] S. OSHER et R. FEDKIW. *Level set methods and dynamic implicit surfaces*. Applied mathematical science. New York, USA : Springer, 2003. ISBN : 0-387-95482-1.

- [OS88] S. OSHER et J.A. SETHIAN. « Fronts propagating with curvature-dependant speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations ». In : *Journal of Computational Physics* 79.1 (nov. 1988), p. 12-49.
- [PB02] F. PRECIOSO et M. BARLAUD. « B-Spline active contour with handling of topology changes for fast video segmentation ». In : *Eurasip Journal on Applied Signal Processing, special issue : image analysis for multimedia interactive services - PART II* 2002.6 (juin 2002), p. 555-560.
- [PD02] N. PARAGIOS et R. DERICHE. « Geodesic Active Regions and Level Set Methods for Supervised Texture Segmentation ». In : *International Journal of Computer Vision* 46.3 (2002), p. 223-247.
- [PH91] A. PENTLAND et B. HOROWITZ. « Recovery of Nonrigid Motion and Structure ». In : *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 13.7 (1991), p. 730-742.
- [Poc+09] T. POCK et al. « A Convex Relaxation Approach for Computing Minimal Partitions ». In : *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2009, p. 810-817.
- [Qin+92] F. QIN et al. « Finite-difference solution of the eikonal equation along expanding wavefronts ». In : *Geophysics* 57.3 (1992), p. 478-487.
- [ROF92] L. RUDIN, S. OSHER et E. FATEMI. « Nonlinear Total Variation based noise removal algorithms ». In : *Physica D* 60 (1992), p. 259-268.
- [Ron94] R. RONFARD. « Region based strategies for active contour models. » In : *International Journal of Computer Vision* 13.2 (oct. 1994), p. 229-251.
- [RT92] E. ROUY et A. TOURIN. « A viscosity solution approach to shape-from-shading ». In : *SIAM Journal of Numerical Analysis* 29 (1992), p. 867-884.
- [Sch92] C. SCHNÖRR. « Computation of discontinuous optical flow by domain decomposition and shape optimization ». In : *International Journal of Computer Vision* 8.2 (août 1992), p. 153-165.
- [SD92] L. STAIB et J. DUNCAN. « Boundary finding with parametrically deformable models ». In : *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 14.11 (nov. 1992), p. 1061-1075.
- [Set96] J.A. SETHIAN. « A fast marching level set method for monotonically advancing fronts ». In : *Proc. Nat. Acad. Sci.* 93.4 (1996), p. 1591-1595.
- [Set99] J.A. SETHIAN. *Level set methods and fast marching methods : evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision and material sciences*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 1999.
- [Shi05] Y. SHI. « Object-Based Dynamic Imaging With Level Set Methods ». Thèse de doctorat. Université de Boston, USA, 2005.

Optimisation de formes en sciences de l'ingénieur

- [SK05] Y. SHI et W. C. KARL. « A fast level set method without solving PDEs ». In : *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*. T. 2. Mar. 2005, p. 97-100.
- [SKO09] P. STRANDMARK, F. KAHL et N. OVERGAARD. « Optimizing parametric total variation models. » In : *IEEE International Conference on Computer Vision*. 2009, p. 2240-2247.
- [SP03] C. SUN et S. PALLOTTINO. « Circular Shortest Path in images ». In : *Pattern Recognition* 36.3 (mar. 2003), p. 709-719.
- [Str82] G. STRANG. « L^1 and L^∞ and approximation of vector fields in the plane ». In : *Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Science*. Sous la dir. de H. FUJITA, P. LAX et G. STRANG. T. 5. Lecture Notes in Num. Appl. Anal. 1982, p. 273-288.
- [Str83] G. STRANG. « Maximal flow through a domain ». In : *Mathematical Programming* 26 (1983), p. 123-143.
- [SZ92] J. SOKOLOWSKI et J.P. ZOLÉSIO. *Introduction to shape optimization : shape sensitivity analysis*. T. 16. Springer Series in Computational Mathematics. Berlin, Heidelberg, New York : Springer Verlag, juil. 1992.
- [T D01] T. DESCHAMPS. « Extraction de courbes et surfaces par méthodes de chemins minimaux et ensembles de niveaux. Applications en imagerie médicale 3D. » Thèse de doctorat. Place du maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex : Université Paris-IX Dauphine, déc. 2001.
- [Tsi95] J. TSITSIKLIS. « Efficient algorithms for globally optimal trajectories ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 40.9 (sept. 1995), p. 1528-1538.
- [TWK88] D. TERZOPOULOS, A. WITKIN et M. KASS. « Constraints on deformable models : recovering 3D shape and nongrid motion ». In : *Artificial Intelligence* 36.1 (1988), p. 91-123.
- [VC02] L. VESE et T. CHAN. « A multiphase level set framework for image segmentation using the Mumford and Shah model ». In : *International Journal of Computer Vision* 50.3 (2002), p. 271-293.
- [VM01] F. VELASCO et J. MARROQUIN. « Robust parametric active contours : the Sandwich Snakes ». In : *Machine Vision and Applications* 12 (2001), p. 238-242.
- [Wer+09] M. WERLBERGER et al. « A Variational Model for Interactive Shape Prior Segmentation and Real-Time Tracking ». In : *International Conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision (SSVM)*, à paraître. Juin 2009.
- [XP98] C. XU et J. PRINCE. « Snakes, Shapes, and Gradient Vector Flow ». In : *IEEE Transactions on Image Processing* 7.3 (mar. 1998), p. 359-369.

Bibliographie

- [XPP00] C. XU, D. PHAM et J. PRINCE. « Medical Image Segmentation Using Deformable Models ». In : *Handbook of Medical Imaging – Volume 2 : Medical Image Processing and Analysis*. T. PM80. SPIE Press, juin 2000. Chap. 3, p. 129-174.
- [XYP00] C. XU, A. YEZZI et J. PRINCE. « On the relationship between parametric and geometric active contours ». In : *Proc. 34th Asilomar Conference on Signal, Systems and Computers*. Oct. 2000, p. 483-489.
- [YBS06] L. YATZIV, A. BARTESAGHI et G. SAPIRO. « O(N) implementation of the fast marching algorithm ». In : *Journal of computational physics* 212 (2006), p. 393-399.
- [YTW99] A. YEZZI, A. TSAI et A. WILLSKY. « A statistical approach to snakes for bimodal and trimodal imagery ». In : *Proc. of 7th IEEE International Conference on Computer Vision*. T. 2. Kerkyra, Grèce, sept. 1999, p. 898-903.
- [ZY96] S. ZHU et A. YUILLE. « Region competition : unifying snakes, region growing, and Bayes/MDL for multiband image segmentation ». In : *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 18.9 (sept. 1996), p. 884-900.